

Coeurs dynamiques

**FORMATION MODÉLISATION NUMÉRIQUE DE L'OCÉAN ET DE L'ATMOSPHÈRE
PARIS, 25 NOVEMBRE-29 NOVEMBRE 2019**

LAURENT.DEBREU@INRIA.FR

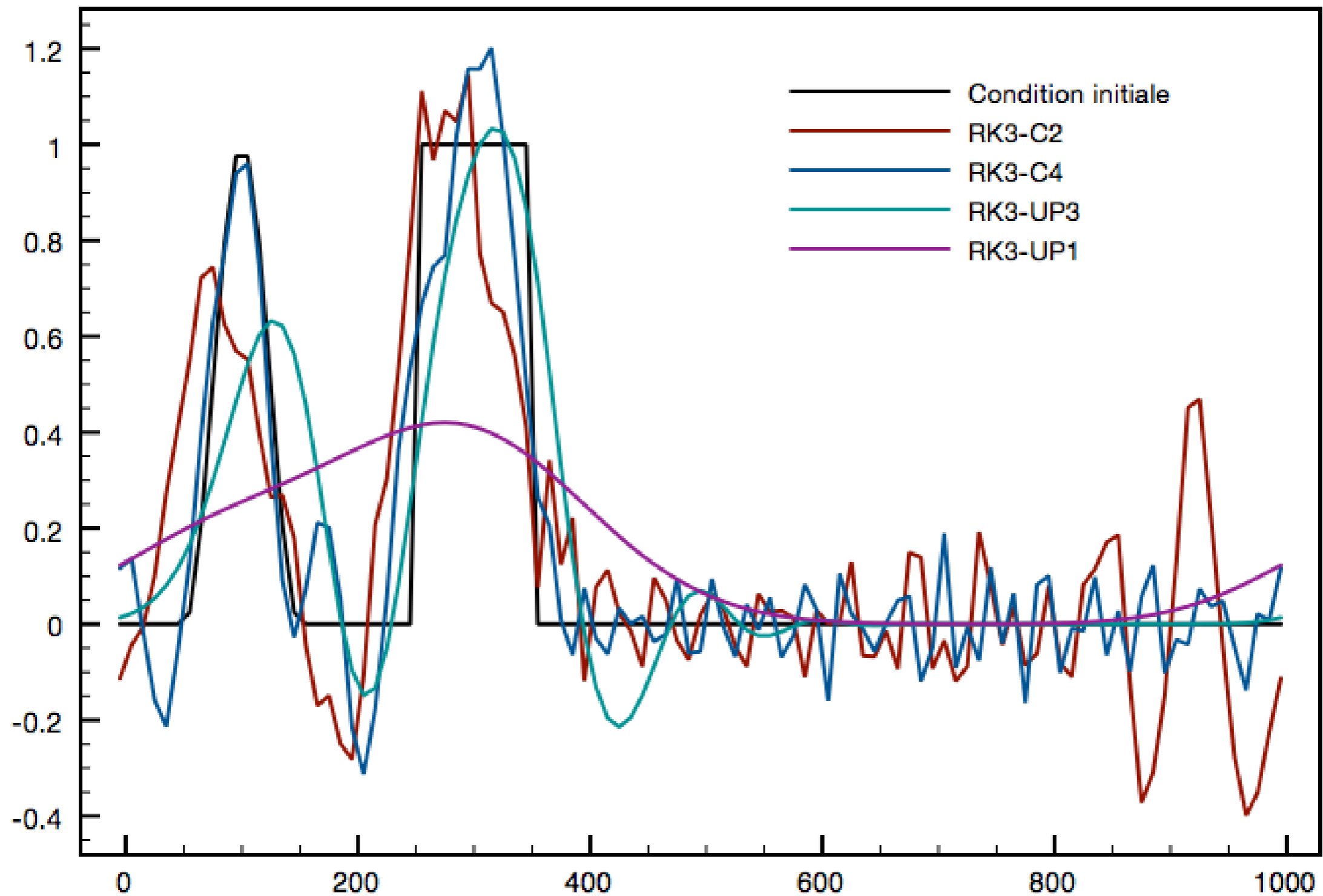
Plan

- **PROPRIÉTÉS DE MONOTONIE**
- SCHÉMAS SEMI-LAGRANGIEN ET SCHÉMAS
ESPACE-TEMPS

Propriétés de monotonie:

EQUATION D'ADVECTION

SCHÉMA TEMPOREL : RK3



Monotonie et non-linéarités

EQUATION DE BURGERS NON VISQUEUSE :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0$$

LIMITE DE L'EQUATION DE BURGERS VISQUEUSE QUAND $\epsilon \rightarrow 0$

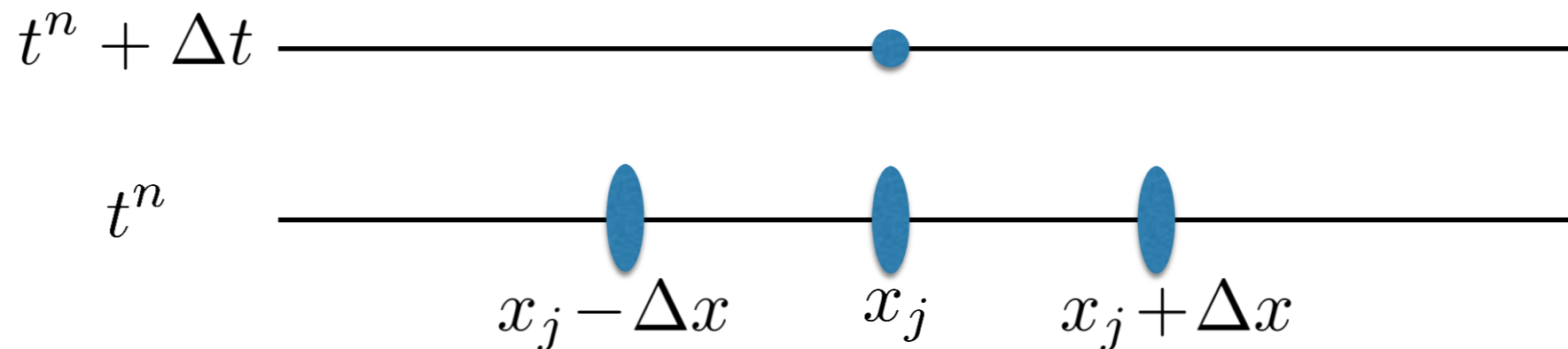
$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\epsilon^2}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x^2}$$

SI LES GRADIENTS SONT FORTS, LE TERME VISQUEUX NE PEUT ÊTRE NÉGLIGÉ
(MÊME SI ϵ EST PETIT).

UTILISATION DE SCHÉMAS NUMÉRIQUES QUI INCLUENT UNE DISSIPATION NUMÉRIQUE
FORTE PROCHE DES FORTS GRADIENTS

Propriétés de monotonie:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$



UPWIND RANGE CONDITIONS

$$\min(u_j^n, u_{j-1}^n) \leq u_j^{n+1} \leq \max(u_j^n, u_{j-1}^n) \text{ si } c > 0$$

$$\min(u_j^n, u_{j+1}^n) \leq u_j^{n+1} \leq \max(u_j^n, u_{j+1}^n) \text{ si } c < 0$$

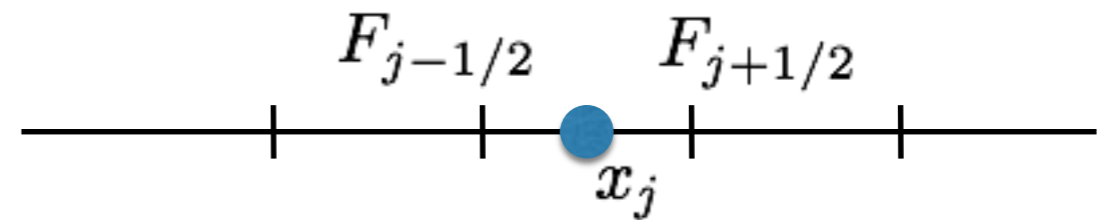
IMPLIQUE LA POSITIVITÉ (MAXIMUM DISCRET)

Approche TVD (Total Variation Diminishing)

Propriétés de monotonie:

SUPPRESSION DE LA CRÉATION DES EXTREMAS

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2} - F_{j-1/2})$$



EULER AMONT $F_{j+1/2} = c u_j^n$

$$u_j^{n+1} = \mu u_{j-1}^n + (1 - \mu) u_j^n, \quad \mu = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

si $\mu \leq 1$, alors $\min(u_j^n, u_{j-1}^n) \leq u_j^{n+1} \leq \max(u_j^n, u_{j-1}^n) \longrightarrow$ OK

Propriétés de monotonie:

SUPPRESSION DE LA CRÉATION DES EXTREMAS

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2} - F_{j-1/2})$$

LAX WENDROFF $F_{j+1/2} = c u_j^n + c \frac{1}{2} \left(1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (u_{j+1}^n - u_j^n)$

ORDRE 2 EN ESPACE ET EN TEMPS


$$u_j^{n+1} = \frac{\mu}{2} (1 + \mu) u_{j-1}^n + (1 - \mu) u_j^n - \frac{\mu}{2} (1 - \mu) u_{j+1}^n \longrightarrow \text{KO}$$

Propriétés de monotonie:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2} - F_{j-1/2})$$

LAX WENDROFF

LIMITEUR DE FLUX

$$F_{j+1/2} = cu_j^n + \phi_j^n c \frac{1}{2} \left(1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) (u_{j+1}^n - u_j^n)$$


APRÈS CALCULS ..., ON PEUT ÉCRIRE :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - C_{j-1/2}^- (u_j^n - u_{j-1}^n)$$

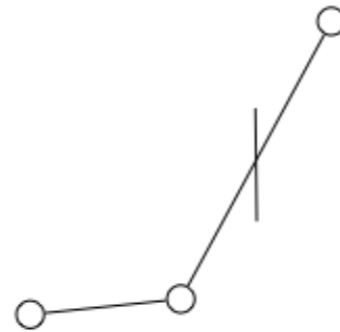
où

$$C_{j-1/2}^- = \mu + \frac{\mu}{2} (1 - \mu) \left[\frac{\phi_j^n}{r_j^+} - \phi_{j-1}^n \right] \quad r_j^+ = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n}$$

RAPPORT PENTE AMONT / PENTE CENTRÉE

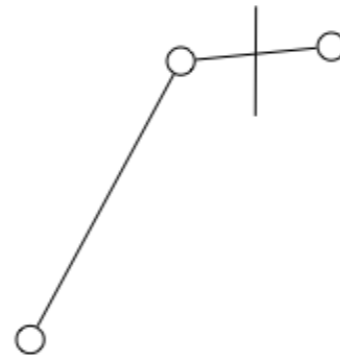
Propriétés de monotonie:

$$r_j^+ = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n}$$



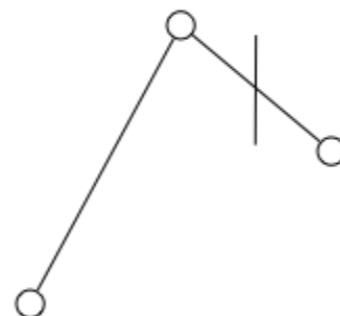
$$0 < r_j \ll 1$$

risque de créer un minimum local



$$r_j \gg 1$$

risque de créer un maximum local



$$r_j < 0$$

en présence d'un maximum local

Propriétés de monotonie:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - C_{j-1/2}^-(u_j^n - u_{j-1}^n) \quad C_{j-1/2}^- = \mu + \frac{\mu}{2}(1 - \mu) \left[\frac{\phi_j^n}{r_j^+} - \phi_{j-1}^n \right]$$

$$\text{si } 0 \leq C_{j-1/2}^- \leq 1, \quad \min(u_j^n, u_{j-1}^n) \leq u_j^{n+1} \leq \max(u_j^n, u_{j-1}^n)$$

$$\text{Si } \mu \leq 1 \quad 0 \leq C_{j-1/2}^- \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{1-\mu} \leq \frac{\phi_j^n}{r_j^+} - \phi_{j-1}^n \leq \frac{2}{\mu}$$

$$-2 \leq \frac{\phi_j^n}{r_j^+} - \phi_{j-1}^n \leq 2 \quad \longrightarrow \quad \text{CONDITIONS DE SWEBY} \quad \begin{cases} 0 \leq \phi_j^n \leq 2 & \forall j \\ 0 \leq \frac{\phi_j^n}{r_j^+} \leq 2 & \forall j \end{cases}$$

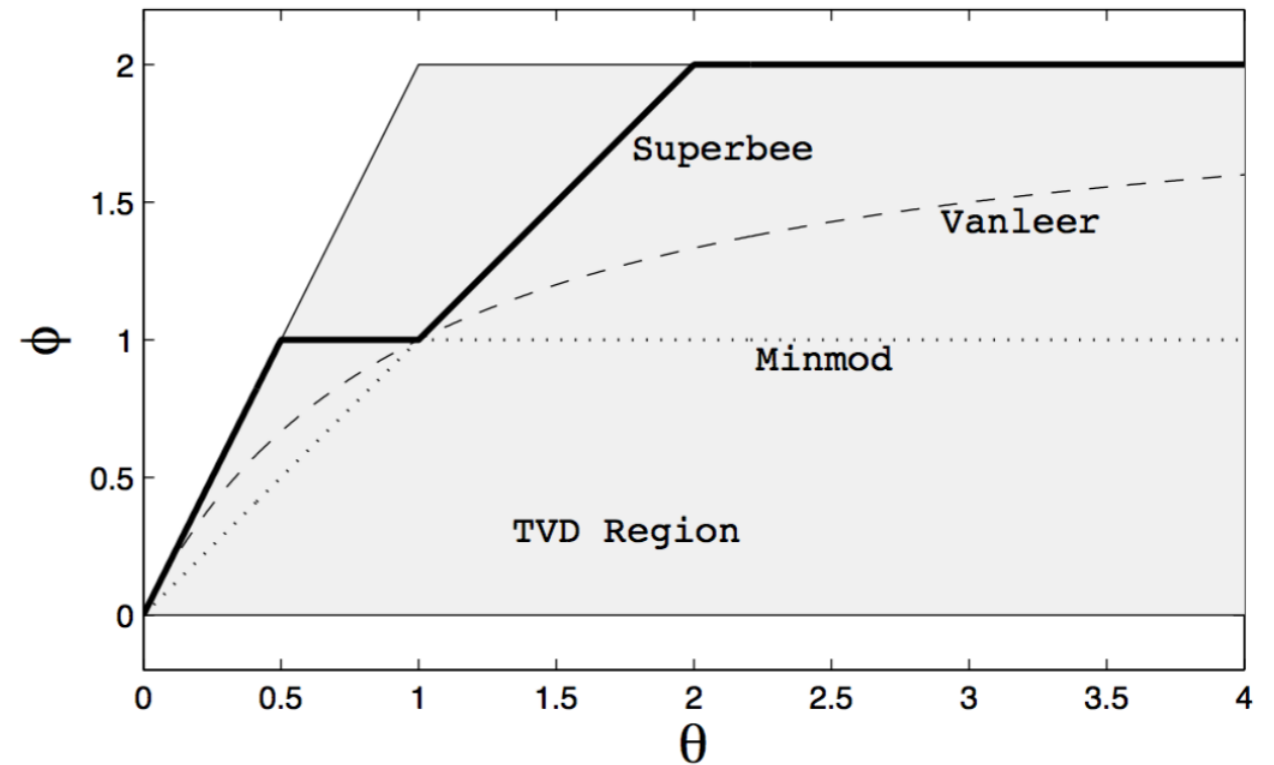
LAX WENDROFF : $\phi(r) = 1$
 BEAM ET WARMING : $\phi(r) = r$

PLUS GÉNÉRAL $\begin{cases} 0 \leq \phi_j^n \leq \frac{2}{1-\mu} & \forall j \\ 0 \leq \frac{\phi_j^n}{r_j^+} \leq \frac{2}{\mu} & \forall j \end{cases}$

Propriétés de monotonie:

$$0 \leq \phi_j^n \leq 2 \quad \forall j$$

$$0 \leq \frac{\phi_j^n}{r_j^+} \leq 2 \quad \forall j$$



QUELQUES LIMITEURS TVD

$$\phi(r) = \max(0, \min(1, r)) = \text{minmod}(1, r)$$

$$\phi(r) = \frac{|r| + r}{1 + r} \quad \text{VAN LEER}$$

SECOND ORDRE SI $\phi(1) = 1$

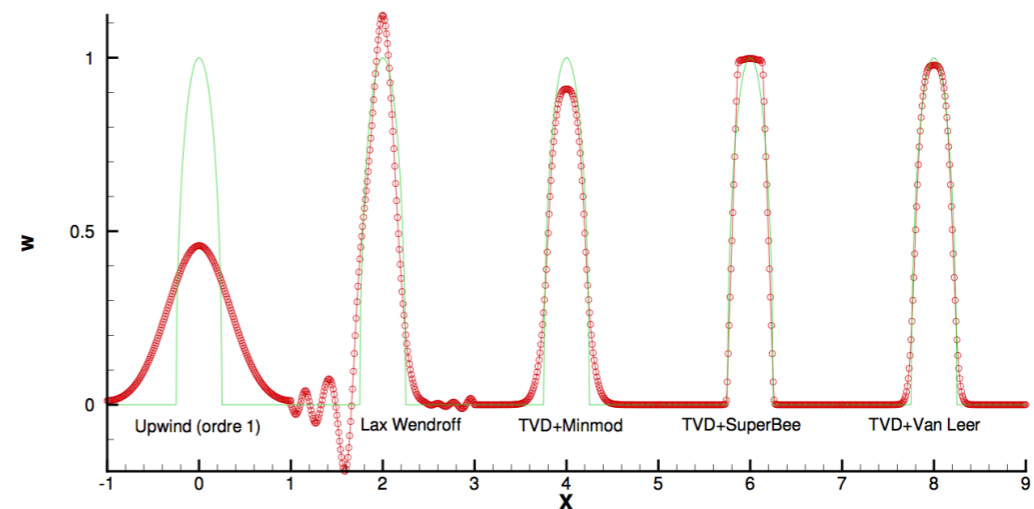
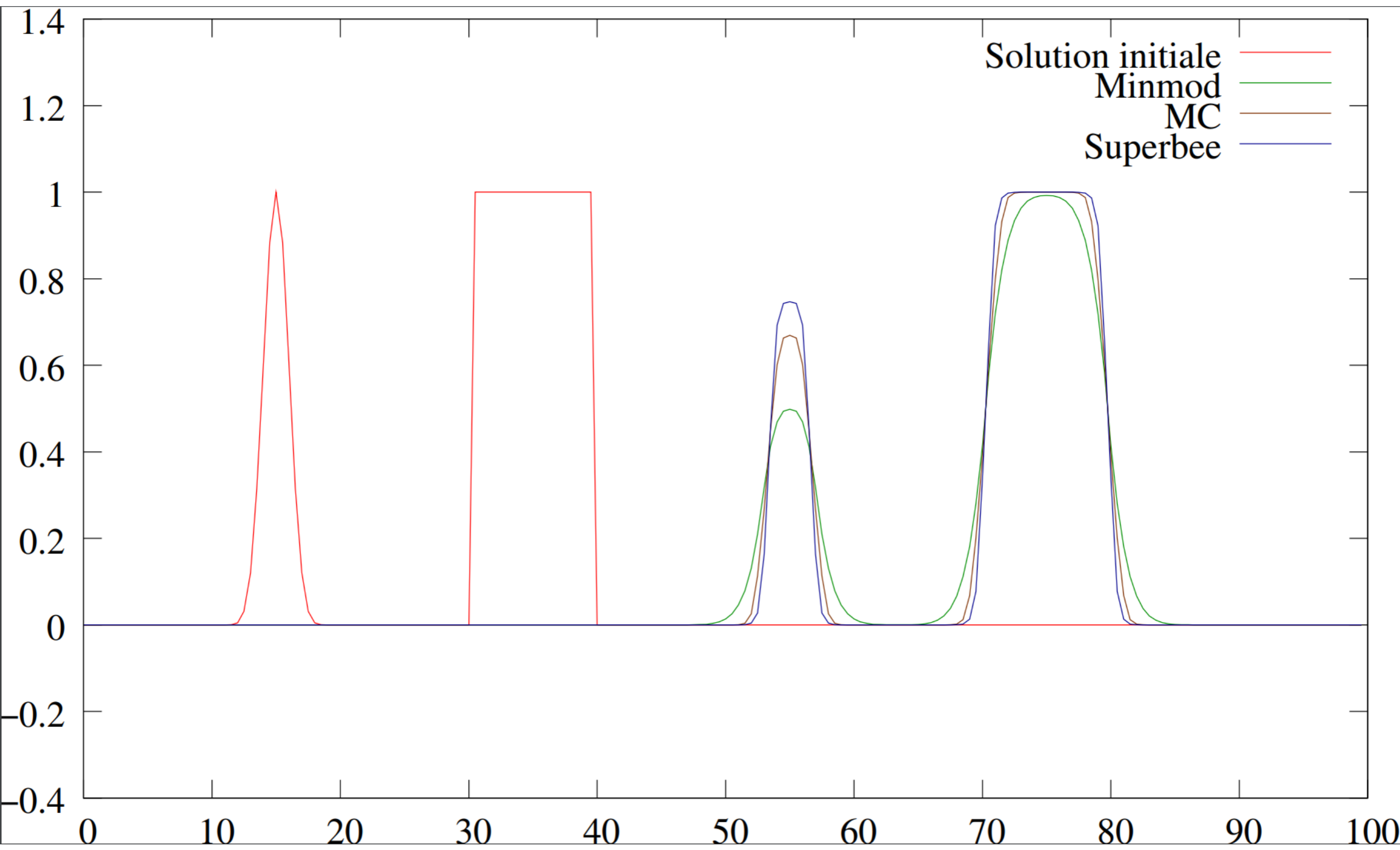


FIG. IV.3 – Solution numérique obtenue par différents schémas pour l'équation scalaire (IV.1), pour une donnée initiale de type arc d'ellipse. C.L. périodiques, 5 tours, maillage 200 points, $\nu = 0.5$.



Monotonie : autres approches

- **TVD (TOTAL VARIATION DIMINISHING)**
- **FCT (FLUX CORRECTED TRANSPORT)**
- **ENO (ESSENTIALLY NON OSCILLATORY)**
- **WENO (WEIGHTED ENO)**
- **MP (MONOTONICITY PRESERVING)**

ON PASSE

Approche FCT (Flux Corrected Transport)

Propriétés de monotonie:

ON PASSE

SUPPRESSION DE LA CRÉATION DES EXTREMES

APPROCHE FCT (FLUX CORRECTED TRANSPORT)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2} - F_{j-1/2})$$

LAX WENDROFF : $F_{j+1/2} = c u_j^n + c \frac{1}{2} \left(1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (u_{j+1}^n - u_j^n)$

$$F_{j+1/2} = F_{j+1/2}^l + \left(F_{j+1/2}^h - F_{j-1/2}^h \right)$$

FLUX MONOTONE

FLUX ANTIDIFFUSIF

$$F_{j+1/2} = F_{j+1/2}^l + C_{j+1/2} A_{j+1/2}, \quad A_{j+1/2} = F_{j+1/2}^h - F_{j+1/2}^l$$

SOIT $u_j^{n+1,l} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{j+1/2}^l - F_{j-1/2}^l \right)$

Schémas temporels préservant la stabilité : schémas SSP (Strong Stability Preserving)

AUGMENTATION DE L'ORDRE EN TEMPS

$$\text{RK2 SSP} \left\{ \begin{array}{l} u^0 = u^n \\ u^1 = u^0 + \Delta t L(u^0) \\ u^2 = u^1 + \Delta t L(u^1) \\ u^{n+1} = \frac{1}{2} (u^0 + u^2) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} U^1 = U^n \\ U^2 = U^n + \Delta t \omega U^1 \\ U^{n+1} = U^n + \Delta t \omega \frac{1}{2} (U^1 + U^2) \end{array}$$

$$\text{RK3 SSP} \left\{ \begin{array}{l} u^0 = u^n \\ u^1 = u^0 + \Delta t L(u^0) \\ u^2 = \frac{3}{4} u^0 + \frac{1}{4} [u^1 + \Delta t L(u^1)] \\ u^3 = \frac{1}{3} u^0 + \frac{2}{3} [u^2 + \Delta t L(u^2)] \\ u^{n+1} = u^3 \end{array} \right.$$

$$\text{CFL} : \omega \Delta t \leq 1$$

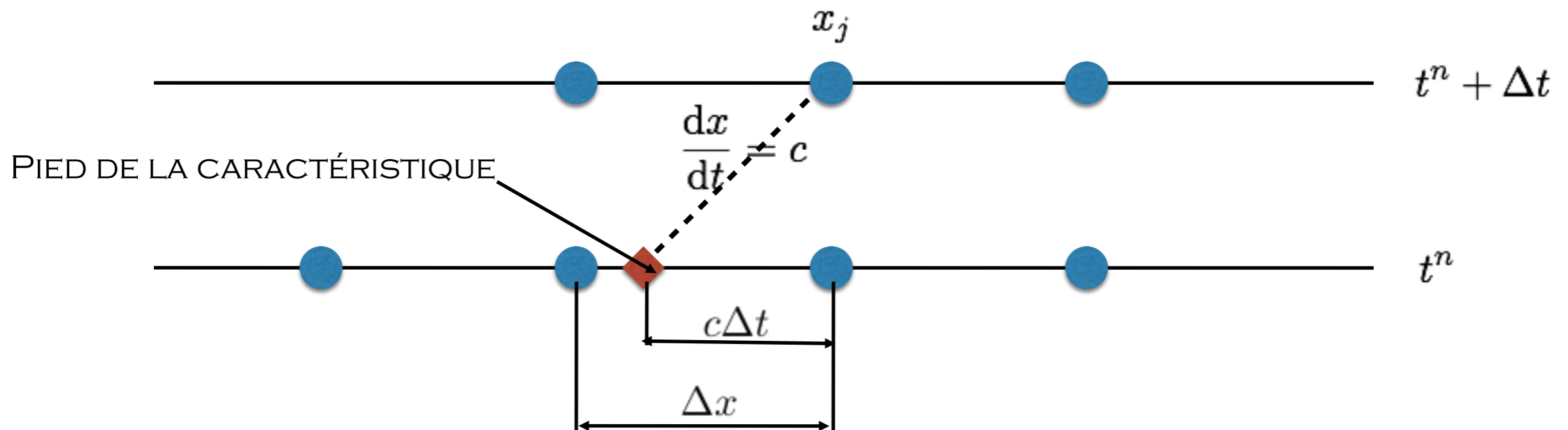
Plan

- PROPRIÉTÉS DE MONOTONIE
- **SCHÉMAS SEMI-LAGRANGIEN ET SCHÉMAS
ESPACE-TEMPS**

Schémas couplés espace temps

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u(x_j, t + \Delta t) = u(x_j - c\Delta t, t)$$



INTERPOLATION AU PIED DE LA CARACTÉRISTIQUE :

- LINÉAIRE : EULER AMONT
- QUADRATIQUE CENTRÉE : LAX-WENDROFF $u_j^{n+1} = u_j^n - \mu \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} + \frac{1}{2} \mu^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$
- QUADRATIQUE DÉCENTRÉE AMONT : BEAM ET WARMING

Schémas couplés espace temps : dérivation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} (\Delta t)^2 - \frac{1}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} (\Delta t)^3 + \mathcal{O}(\Delta t)^4$$

EXPRESSION DES DÉRIVÉES TEMPORELLES EN FONCTION DES DÉRIVÉES SPATIALES

$$\frac{\partial^p u}{\partial t^p} = (-c)^p \frac{\partial^p u}{\partial x^p}$$

PUIS DISCRÉTISATION DES DÉRIVÉES SPATIALES

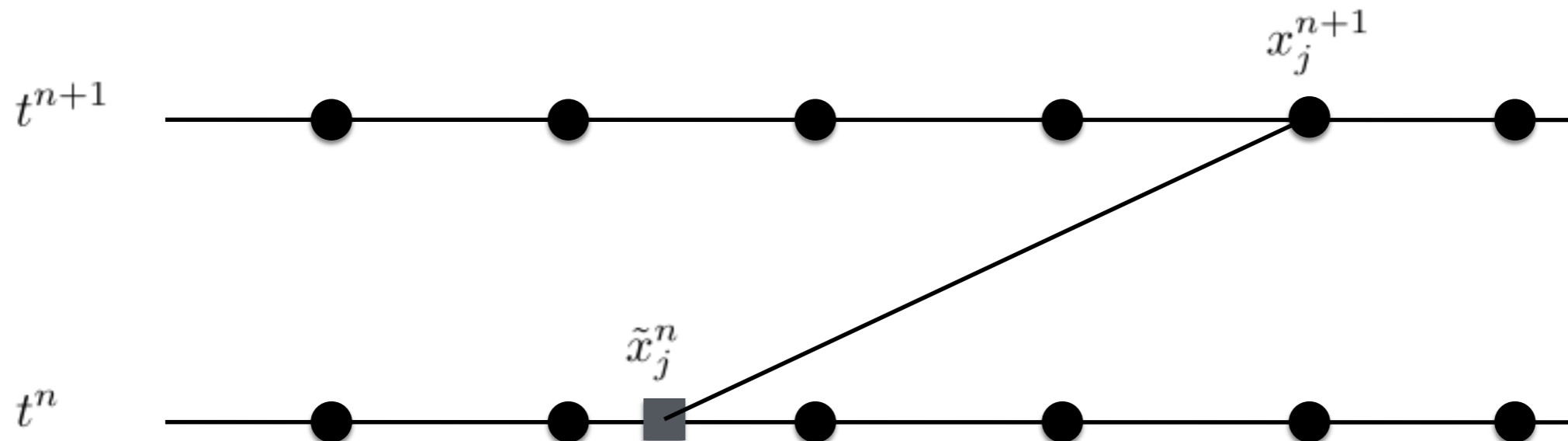
- SCHÉMAS STABLES POUR $\mu = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$
- SCHÉMAS EXACT POUR $\mu = 1$
- 1 ÉVALUATION DU SECOND MEMBRE

Schémas semi-lagrangien : principe

OBJECTIF : CONSTRUIRE UN SCHÉMA D'ADVECTION INCONDITIONNELLEMENT STABLE

$$\frac{dT}{dt} = 0 \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{dx}{dt} = u(x, t)$$

$$T(x_j^{n+1}, t^{n+1}) = T(\tilde{x}_j^n, t^n) \quad \text{où} \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u(x, t) \\ x(t^{n+1}) &= x_j^{n+1} \end{aligned} \quad \tilde{x}_j^n = x(t^n)$$

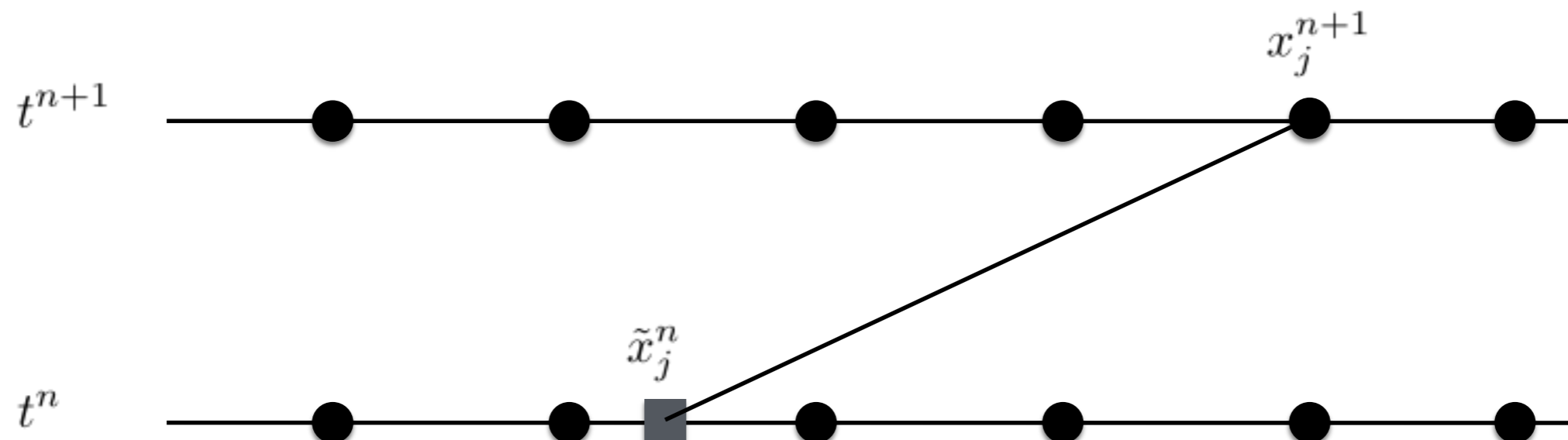


Schémas semi-lagrangien et schémas espace-temps: principe

$$T(x_j^{n+1}, t^{n+1}) = T(\tilde{x}_j^n, t^n)$$

DEUX TYPES D'ERREUR

1. CALCUL DE LA TRAJECTOIRE
2. CALCUL DE L'INTERPOLATION



Schémas semi-lagrangien et schémas espace-temps: principe

A VITESSE CONSTANTE : TRIVIAL

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t) \quad \tilde{x}_j^n = x_j^{n+1} - u\Delta t$$

$$x(t^{n+1}) = x_j^{n+1}$$

CALCUL DE LA TRAJECTOIRE

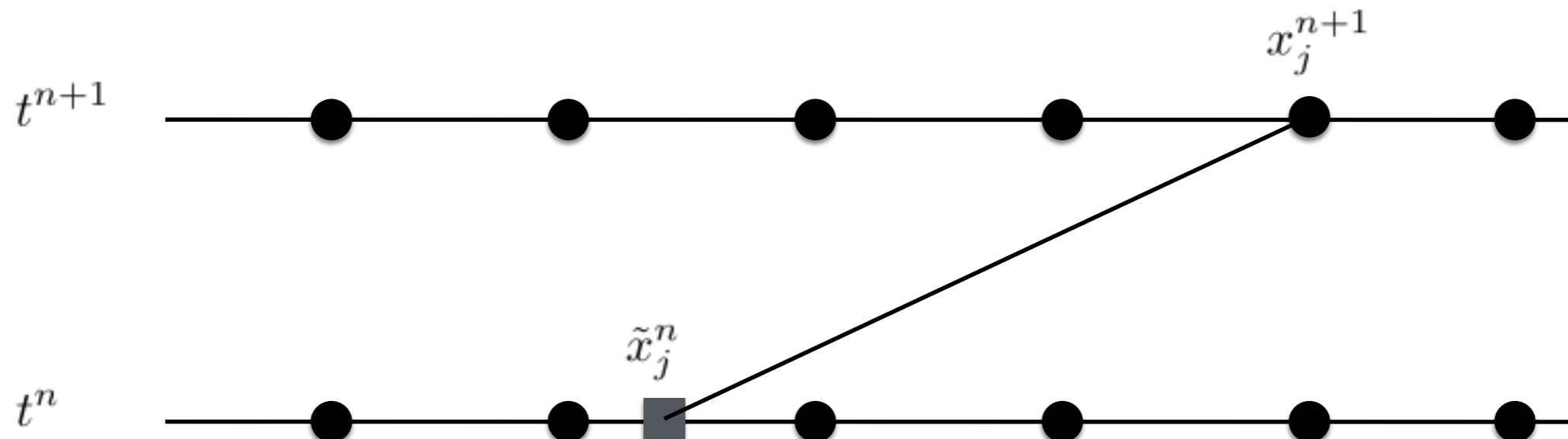
1. ORDRE 1
2. ORDRE 2 (EXTRAPOLATION)

$$\tilde{x}_j^n = x_j^{n+1} - u(x_j^{n+1}, t^n)\Delta t$$

$$x_\star = x_j^{n+1} - u(x_j^{n+1}, t^n)\Delta t/2$$

$$\tilde{x}_j^n = x_j^{n+1} - u(x_\star, t^{n+1/2})\Delta t$$

$$u(t^{n+1/2}) = \frac{3}{2}u(t^n) - \frac{1}{2}u(t^{n-1})$$

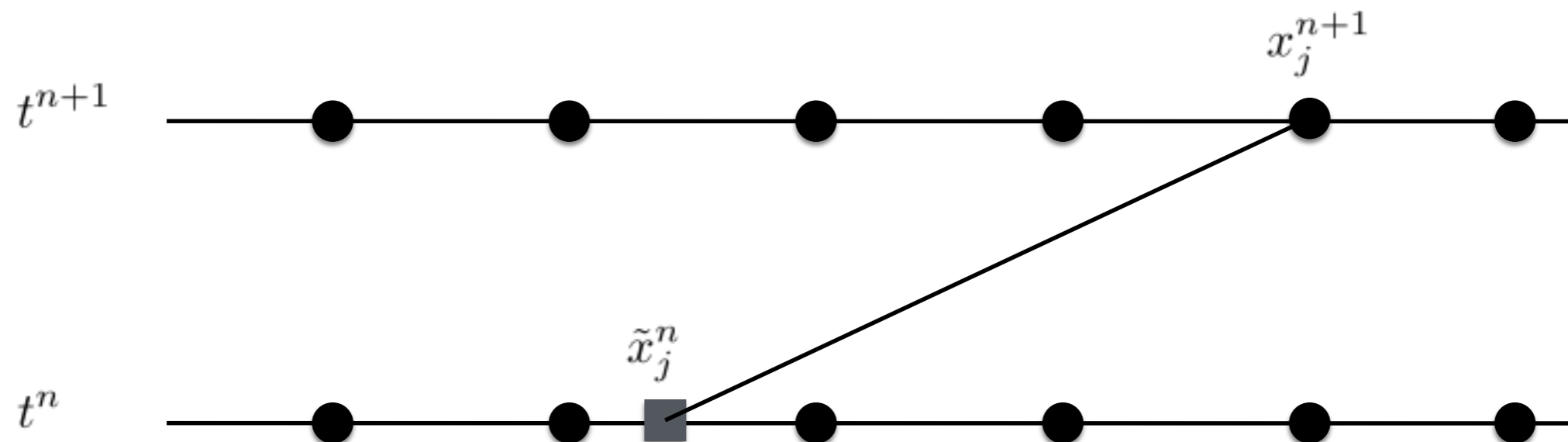


Schémas semi-lagrangien et schémas espace-temps: principe

INTERPOLATION

LINÉAIRE, QUADRATIQUE, CUBIQUE

INTERPOLATIONS MONOTONES



Schémas semi-lagrangien et schémas espace-temps: conservation

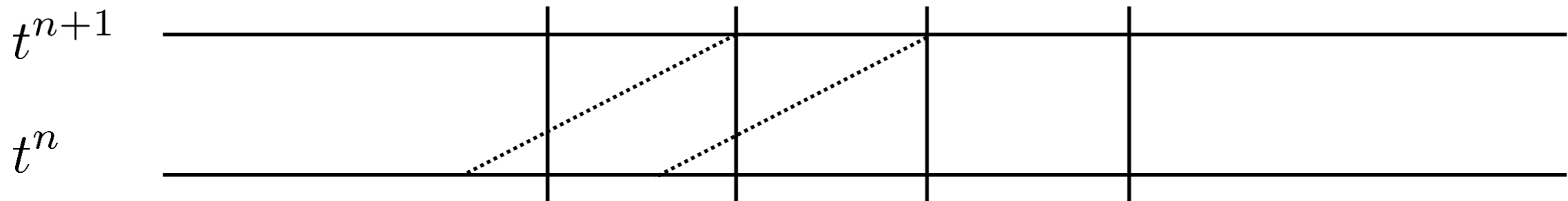
PAR DÉFAUT NON CONSERVATIF : OK POUR INTÉGRATION COURTE

DEUX SOLUTIONS:

- INTÉGRATION DES VOLUMES DE CONTROLE

$$\frac{dT}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt} \int_{V_i} T = 0$$

VOLUME DE CONTROLE (LAGRANGIEN)



$$\int_{V_a^{n+1}} T = \int_{V_d^n} T$$

CISL:
CELL INTEGRATED SEMI LAGRANGIAN

VOLUME SUR LA GRILLE EULÉRIENNE À L'INSTANT N+1

VOLUME À L'INSTANT N+1 DÉTERMINÉ PAR LES CARACTÉRISTIQUES

Schémas semi-lagrangien et schémas espace-temps: conservation

PAR DÉFAUT NON CONSERVATIF : OK POUR INTÉGRATION COURTE

DEUX SOLUTIONS:

- PARTIR DE LA FORME FLUX EULÉRIENNE (VISION VOLUMES FINIS)

$$\frac{dT}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (uT)$$

$$T_i^{n+1} = T_i^n - \int_t^{t+\Delta t} \int_{\partial\Omega_i} uT \cdot \vec{n}$$

LIN AND ROOD, 2006

CALCULÉ EN REMONTANT LES TRAJECTOIRES