

# **Transport numérique**

**FORMATION MODÉLISATION NUMÉRIQUE DE L'OCÉAN ET DE L'ATMOSPHÈRE  
PARIS, 25-29 NOVEMBRE 2019**

[LAURENT.DEBREU@INRIA.FR](mailto:LAURENT.DEBREU@INRIA.FR)

# Plan

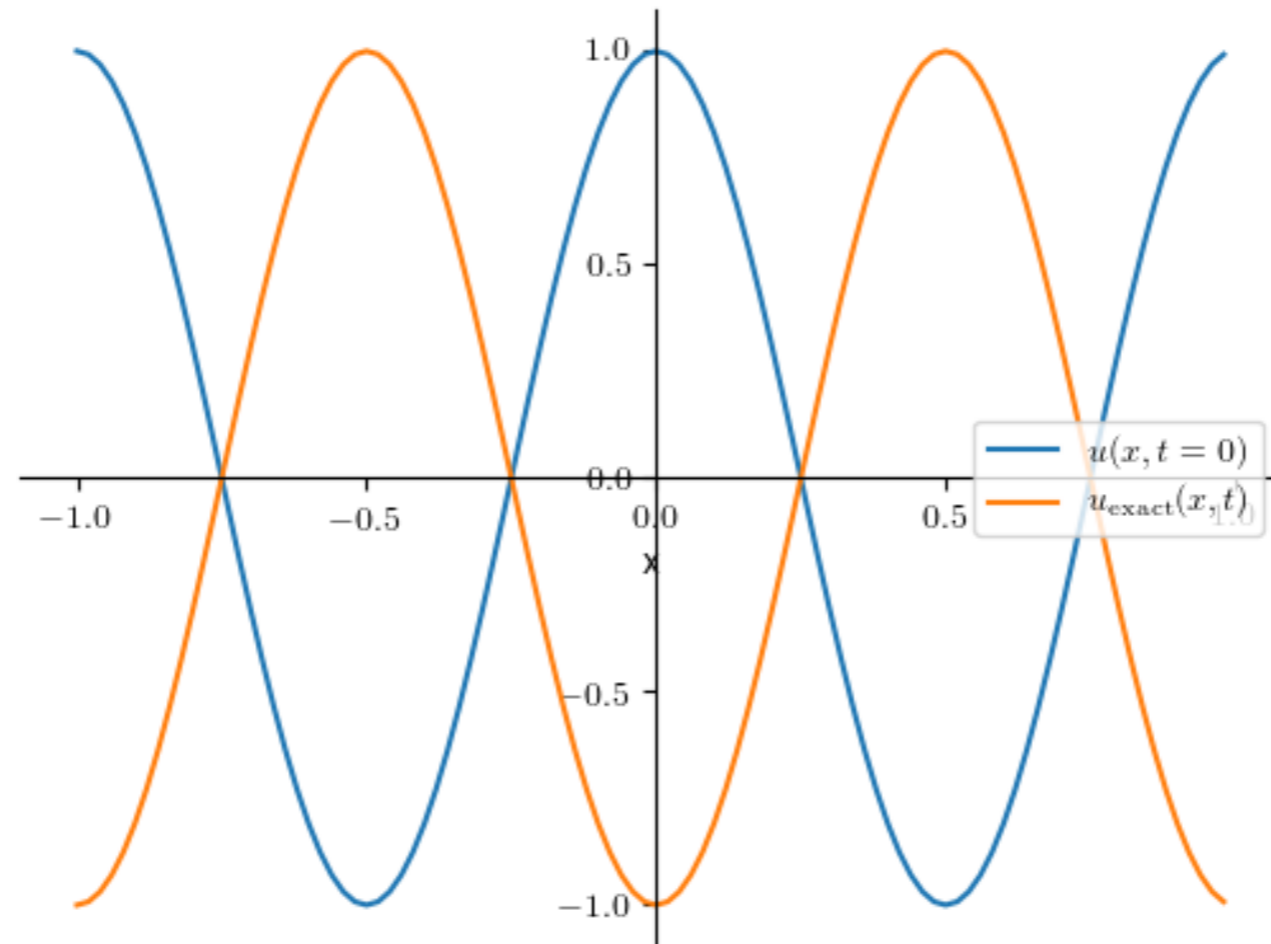
- **ILLUSTRATIONS**
- **ÉTUDE D'UN SCHÉMA NUMÉRIQUE DE TRANSPORT: DISSIPATION / DISPERSION**
- **INTÉRÊT D'AUGMENTER L'ORDRE D'UN SCHEMA**
- **ASPECTS MULTIDIMENSIONNELS**

# Transport 1D à vitesse constante

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

SOLUTION EXACTE :  $u(x, t) = u(x - ct, 0)$

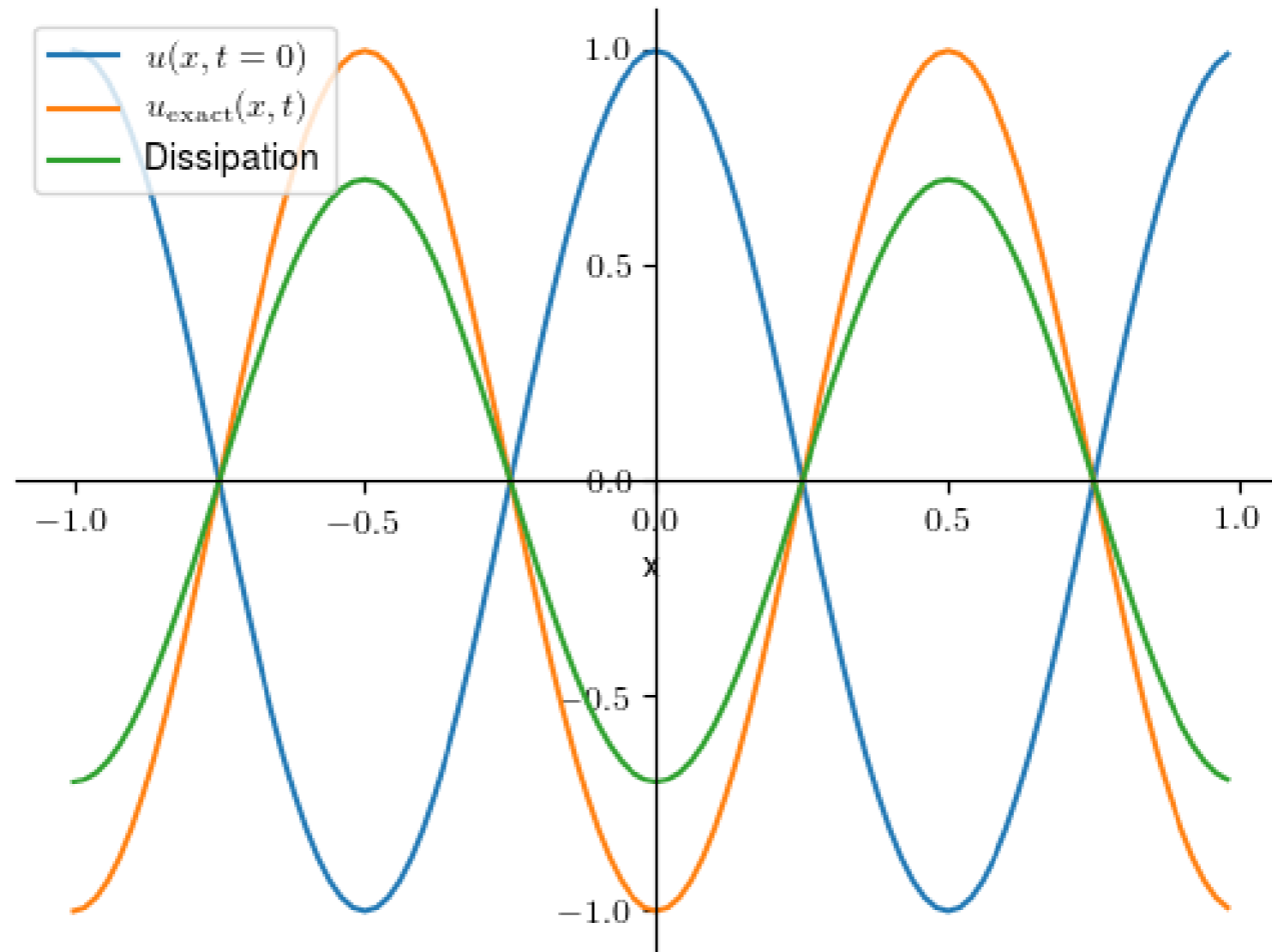
PROPAGATION À VITESSE CONSTANTE  $c$



# Transport 1D à vitesse constante

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

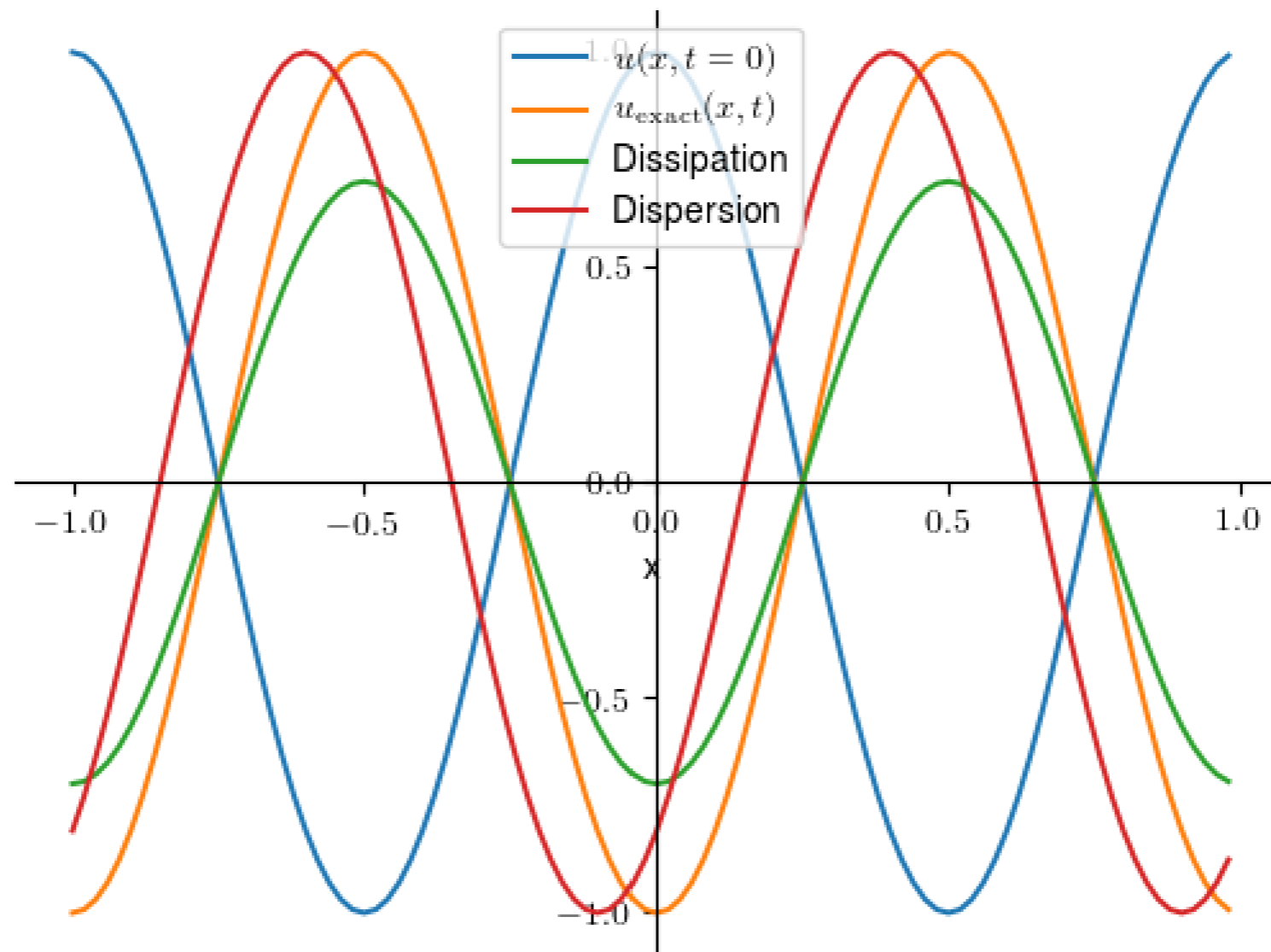
DISSIPATION



# Transport 1D à vitesse constante

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

DISPERSION



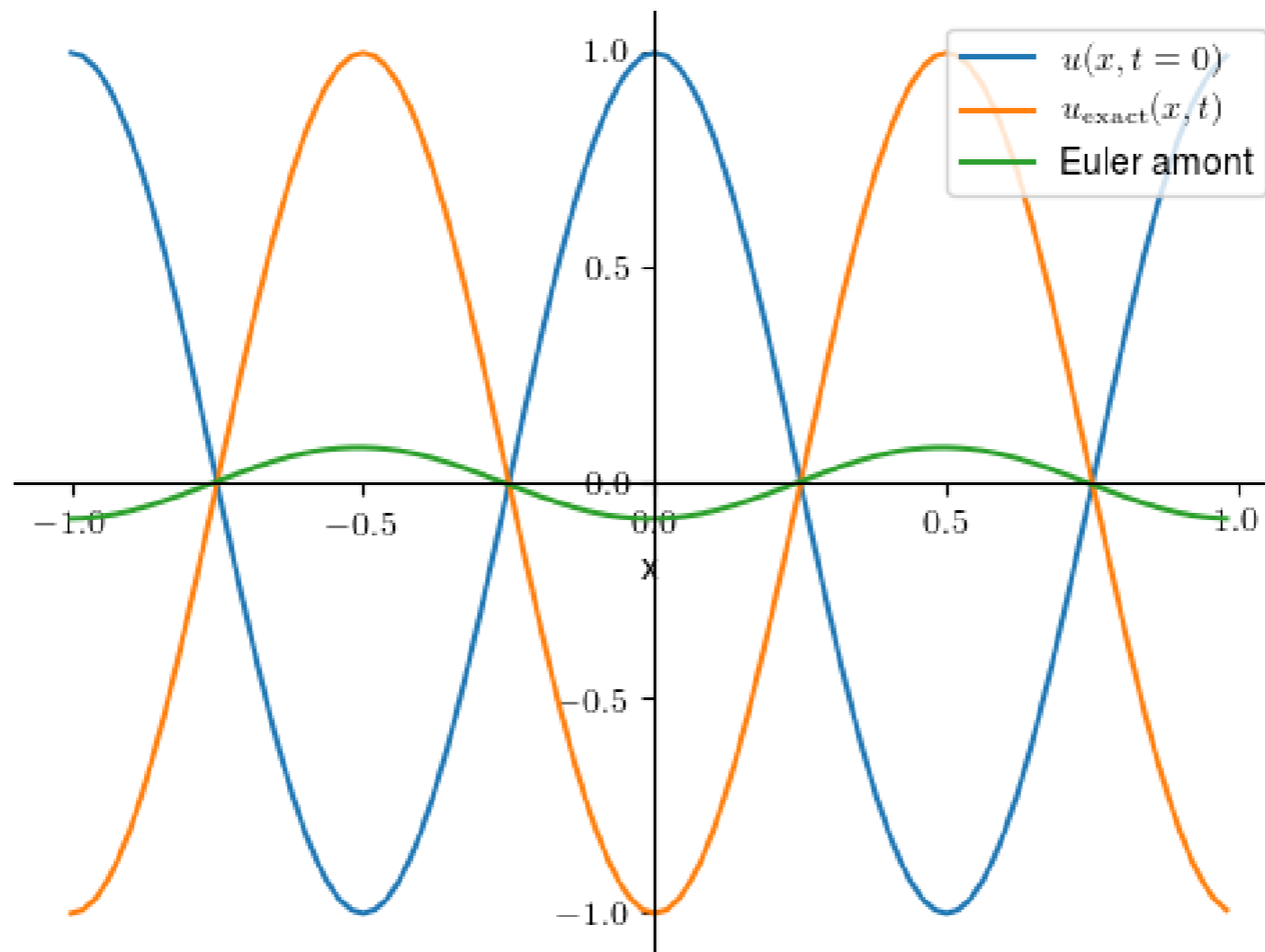
# Le schéma Euler amont

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

SCHÉMA EULER AMONT :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n)$$



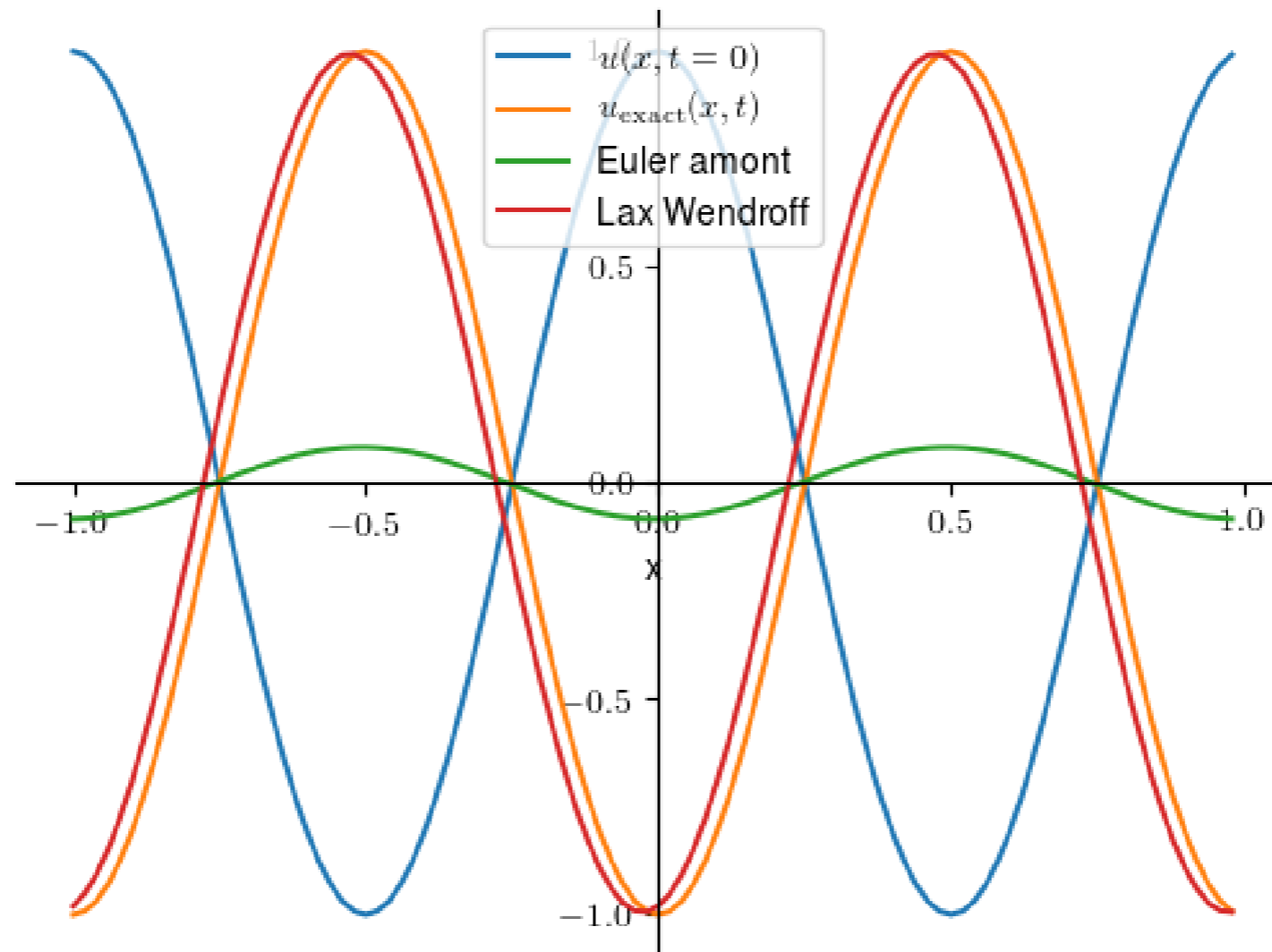
# Euler amont et Lax-Wendroff

SCHÉMA EULER AMONT :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n)$$

SCHÉMA LAX-WENDROFF :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + c^2 \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$



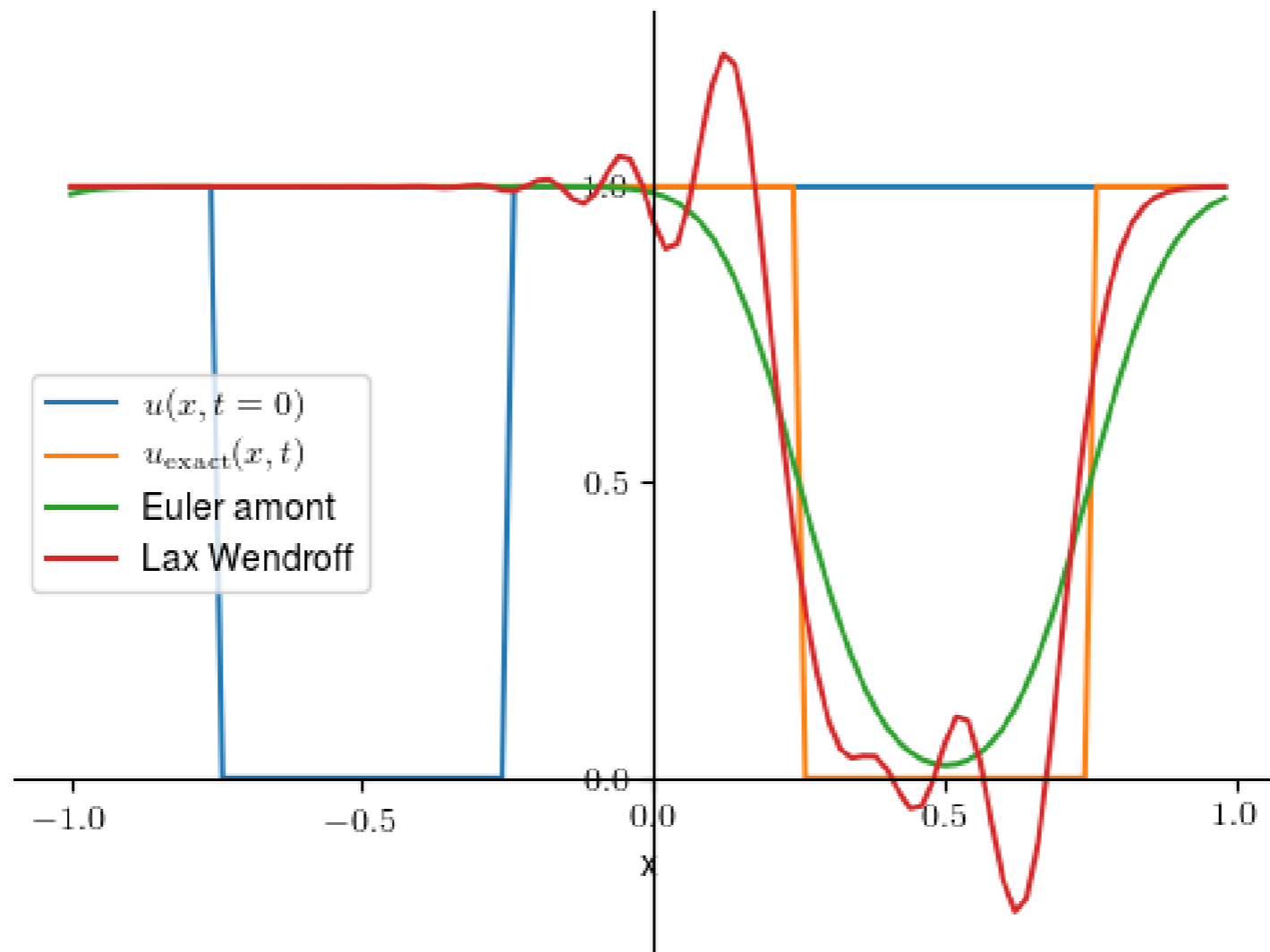
# Sur un créneau

SCHÉMA EULER AMONT :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n)$$

SCHÉMA LAX-WENDROFF :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + c^2 \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$





# Étude d'un schéma numérique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

SOLUTION PÉRIODIQUE

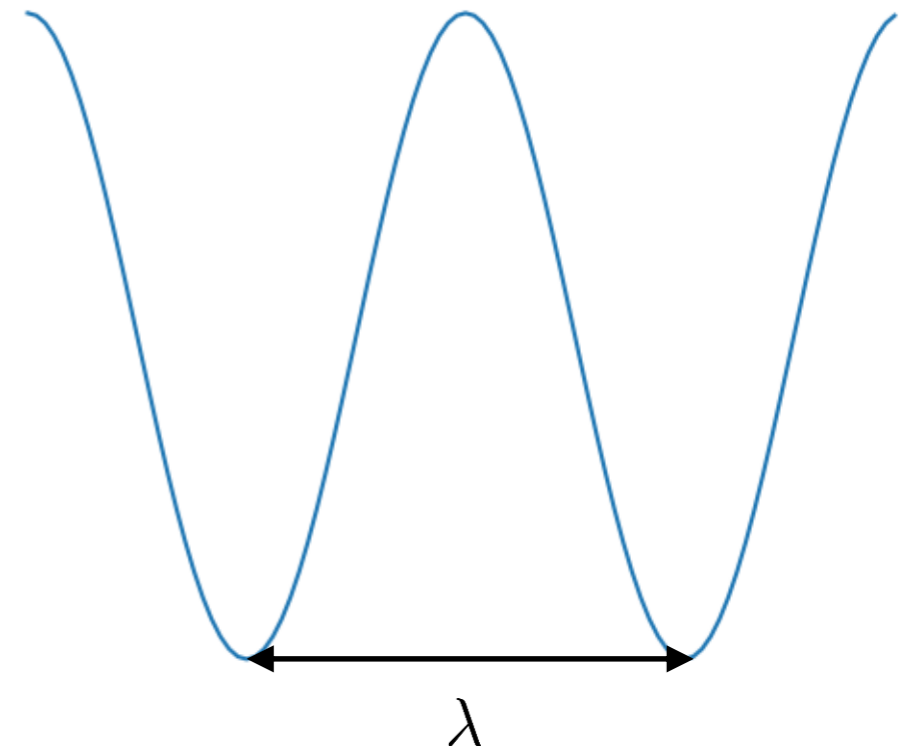
$$u(x, t) = a(t)e^{ikx}$$

$k$

NOMBRE D'ONDE

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

LONGUEUR D'ONDE



$$a'(t) + ikc a(t) = 0 \rightarrow a(t) = a(0)e^{-ikc t}$$

$$u(x, t) = a(0)e^{i(kx - \omega_e t)}, \quad \omega_e = kc$$

# Etude d'un schéma numérique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u_j^n \approx u(x_j, t^n) = e^{i(kx_j - \omega t^n)}$$

GRILLE RÉGULIÈRE

$$x_{j+1} = x_j + \Delta x, \quad t^{n+1} = t^n + \Delta t$$

EULER AMONT : 
$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n)$$

$$e^{-i\omega\Delta t} u_j^n = u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (1 - e^{-ik\Delta x}) u_j^n$$

$$\begin{array}{ccc} \nearrow & G = e^{-i\omega\Delta t} = 1 - \mu(1 - e^{-ik\Delta x}), & \mu = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \nwarrow \end{array}$$

**FACTEUR D'AMPLIFICATION**

**NOMBRE DE COURANT**

$$u_j^{n+1} = G u_j^n$$

POUR LA SOLUTION EXACTE : 
$$G_{\text{exact}} = e^{-i\omega_e \Delta t} = e^{-ikc\Delta t}$$

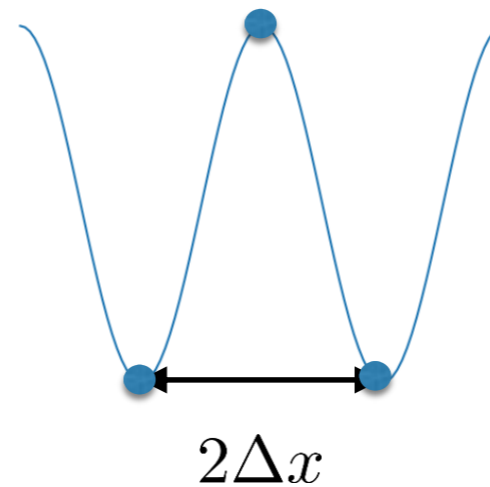
# Étude d'un schéma numérique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$G = e^{-i\omega\Delta t} = 1 - \mu(1 - e^{-i\theta}), \quad \theta = k\Delta x = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}$$

SUR MA GRILLE DE CALCUL

$$\lambda \geq 2\Delta x, \quad \theta \leq \pi$$



$\theta$  PETIT  $\rightarrow$  GRANDES ÉCHELLES

$\theta$  GRAND  $\rightarrow$  PETITES ÉCHELLES


# Étude d'un schéma numérique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

ÉTUDE DU FACTEUR D'AMPLIFICATION  $G$  POUR  $0 \leq \theta \leq \pi$


$$u_j^{n+1} = Gu_j^n$$

---

$$\frac{|u_j^{n+1}|}{|u_j^n|} = |G|,$$


DISSIPATION

$$|G_{\text{exact}}| = 1$$

$$\arg(u_j^{n+1}) - \arg(u_j^n) = \arg(G)$$


CHANGEMENT DE PHASE EN UN PAS DE TEMPS

$$\arg(G_{\text{exact}}) = -\omega_e \Delta t = -kc \Delta t$$

# Etude d'un schéma numérique

ETUDE DU FACTEUR D'AMPLIFICATION  $G$  POUR  $0 \leq \theta \leq \pi$

$$u_j^{n+1} = Gu_j^n$$

$$G = 1 - \mu(1 - e^{-i\theta})$$

$$\frac{|u_j^{n+1}|}{|u_j^n|} = |G|, \quad \frac{\arg(G)}{\arg(G_{\text{exact}})}$$

DISSIPATION

$$|G|^2 = 1 - 2(1 - \mu)\mu(1 - \cos(\theta))$$

**LE SCHÉMA EST STABLE SI  $|G| \leq 1$ ,  $\forall \theta, 0 \leq \theta \leq \pi$**

VRAI SI  $0 \leq \mu \leq 1$

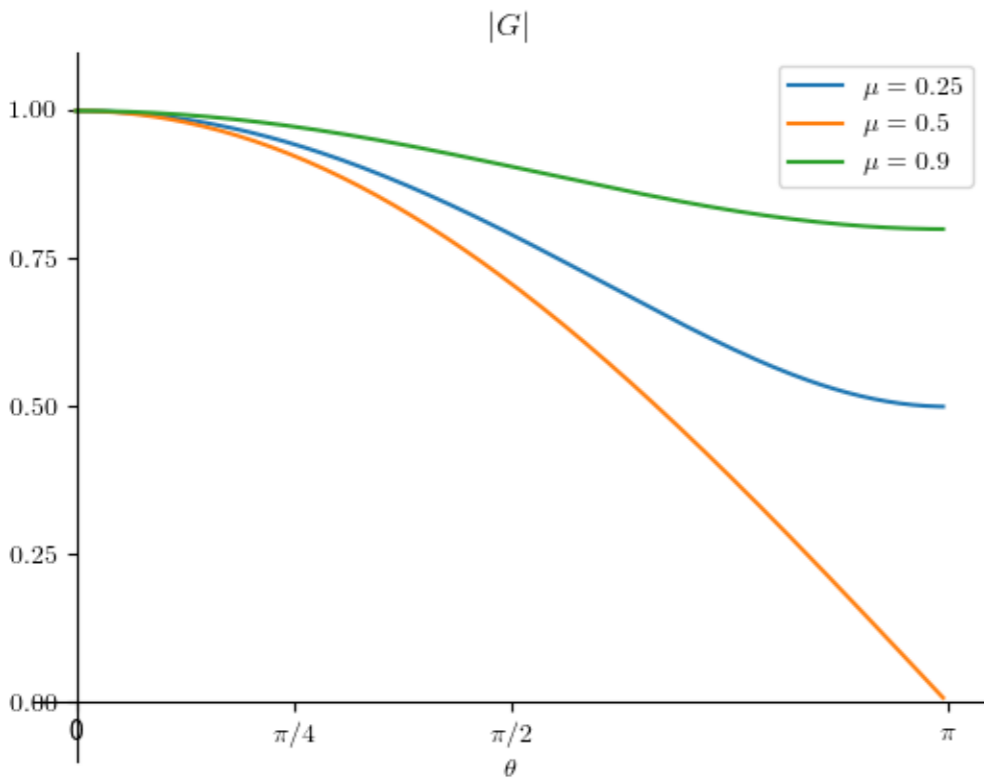
**CONDITION CFL (COURANT FRIEDRICHS LEWY)**

DISPERSION

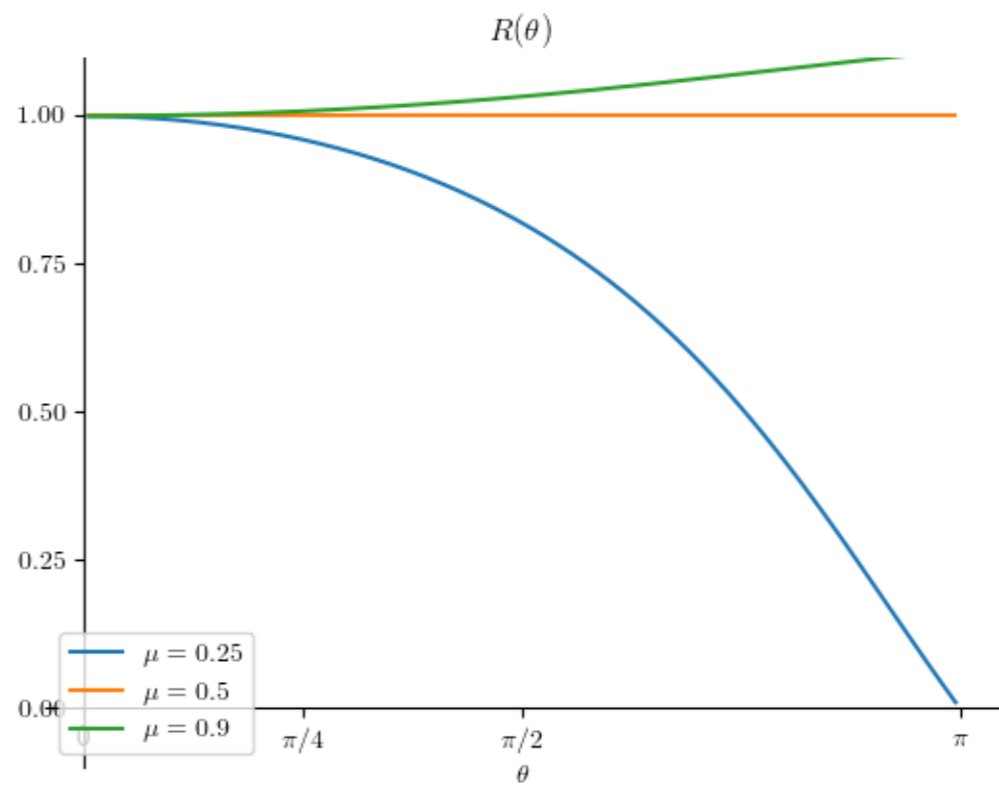
$$R = \frac{\arg(G)}{\arg(G_{\text{exact}})}$$

$$R(\theta) = 1 - \frac{1}{6}(1 - \mu)(1 - 2\mu)\theta^2 + \dots$$

# Euler amount



DISSIPATION



DISPERSION

# Schémas en temps et schémas en espace

EULER AMONT

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \mathcal{O}(\Delta t^p) + \mathcal{O}(\Delta x^q), \quad p = q = 1 \qquad \text{ORDRE 1 EN TEMPS ET ORDRE 1 EN ESPACE}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad u_{j-1}^n = u_j^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

LA DISSIPATION ET LA DISPERSION PEUVENT VENIR À LA FOIS DU SCHÉMA EN TEMPS ET DU SCHÉMA EN ESPACE

*EXERCICE : MONTRER QUE LAX-WENDROFF EST À L'ORDRE 2 EN TEMPS ET EN ESPACE*

$$\text{UTILISER } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

# Schéma spatial

## UN SCHÉMA DÉCENTRÉ DISSIPE

UPWIND ORDRE 1

$$\frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

EQUATION MODIFIÉE



DISSIPATION (SI  $c > 0$ )



# Schéma spatial

## UN SCHÉMA DÉCENTRÉ DISSIPE

UPWIND ORDRE 3

$$\frac{2u_{j+1} + 3u_j - 6u_{j-1} + u_{j-2}}{6\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^3}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{c\Delta x^3}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x)^4$$

EQUATION MODIFIÉE

# Étude séparée en temps et en espace

ON SOUHAITE ÉTUDIER SÉPAREMMENT L'ACTION DU SCHEMA EN TEMPS ET DU SCHÉMA EN ESPACE

EXEMPLES (POUR LE SCHEMA TEMPOREL)

Euler (FORWARD)

$$\frac{du}{dt} = F(u, t), \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = F(u^n, t^n)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = -c \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_n \quad u(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$$

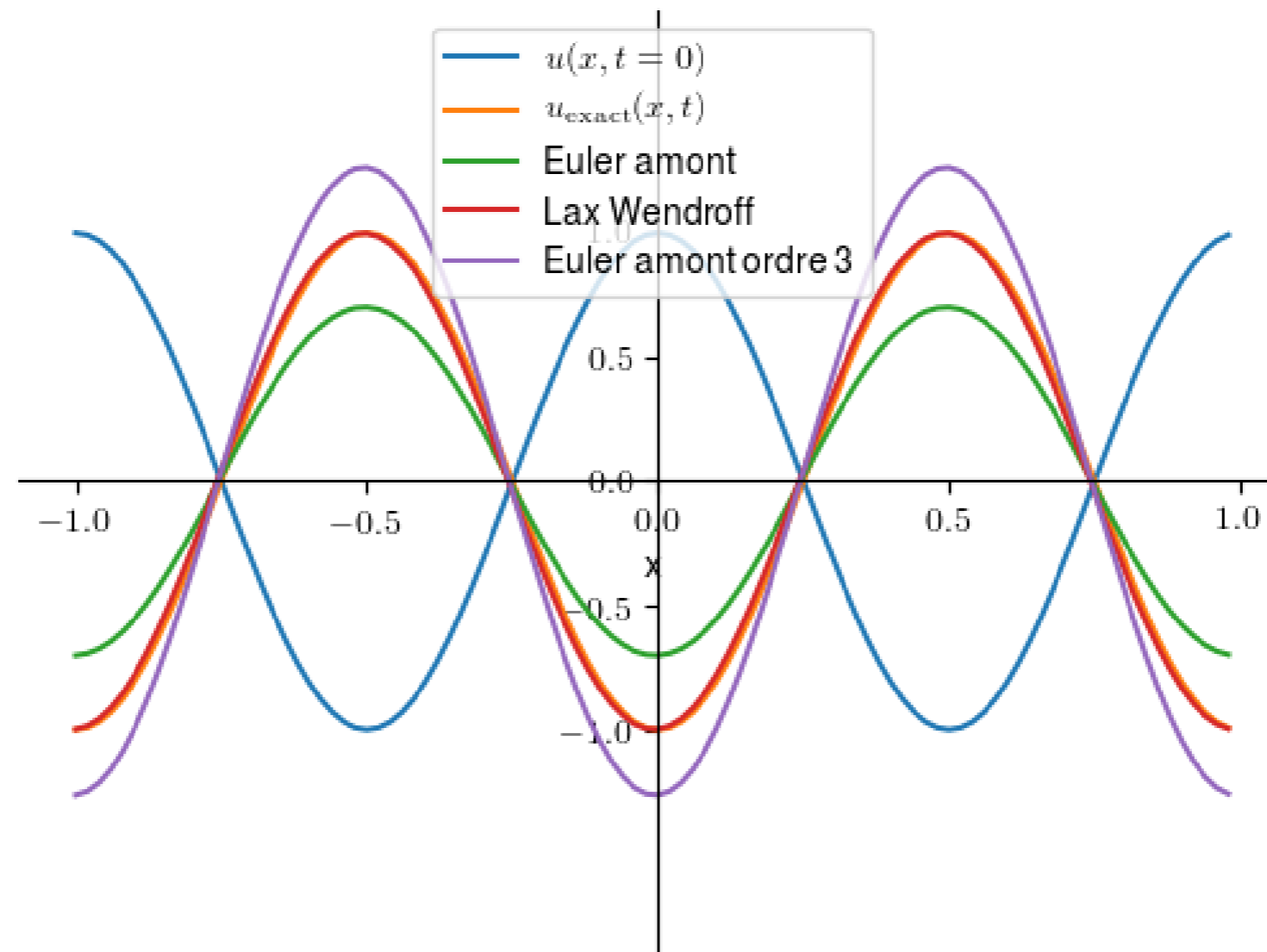
$$u^{n+1} = (1 - ikc\Delta t)u^n = (1 - i\omega\Delta t)u^n$$

$$G = 1 - i\omega\Delta t, \quad |G|^2 = 1 + (\omega\Delta t)^2 > 1$$

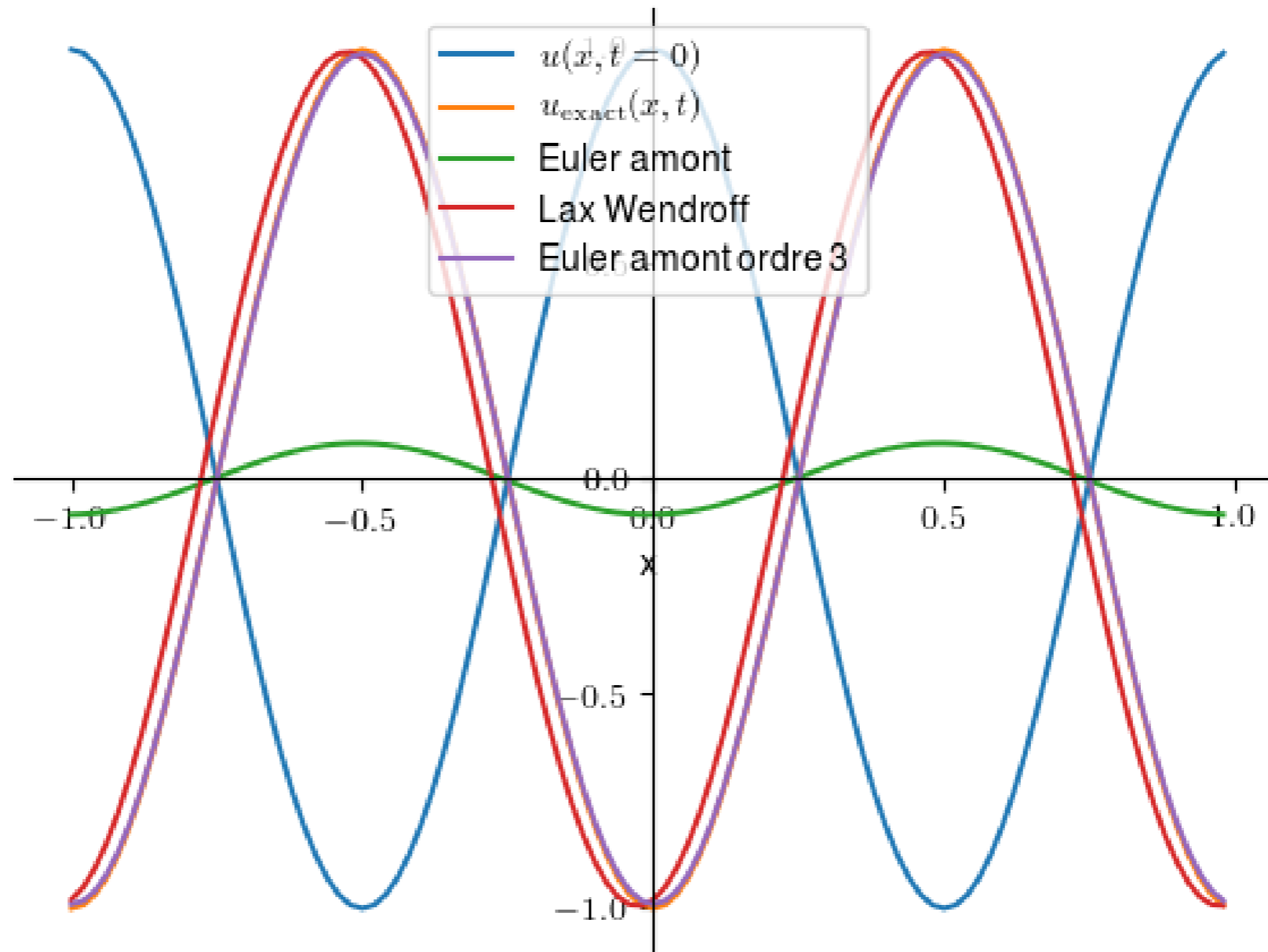
SCHÉMA INSTABLE

*C'EST LA DISSIPATION DU SCHEMA DÉCENTRÉ EN ESPACE QUI STABILITE LE SCHEMA EULER AMONT*

# Euler en temps, up3 en espace



# Runge-Kutta ordre 2 en temps, up3 en espace



# Étude séparée en temps et en espace

ON SOUHAITE ÉTUDIER SÉPAREMMENT L'ACTION DU SCHEMA EN TEMPS ET DU SCHÉMA EN ESPACE

EXEMPLES (POUR LE SCHEMA TEMPOREL)

SCHÉMA  $\theta$

$$\frac{du}{dt} = F(u, t), \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \theta F(u^n, t^n) + (1 - \theta)F(u^{n+1}, t^{n+1})$$

$$u^{n+1} = u^n - c\Delta t \left( \theta \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_n + (1 - \theta) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{n+1} \right)$$

$$(1 + i(1 - \theta)\omega\Delta t)u^{n+1} = (1 - \theta i\omega\Delta t)u^n$$

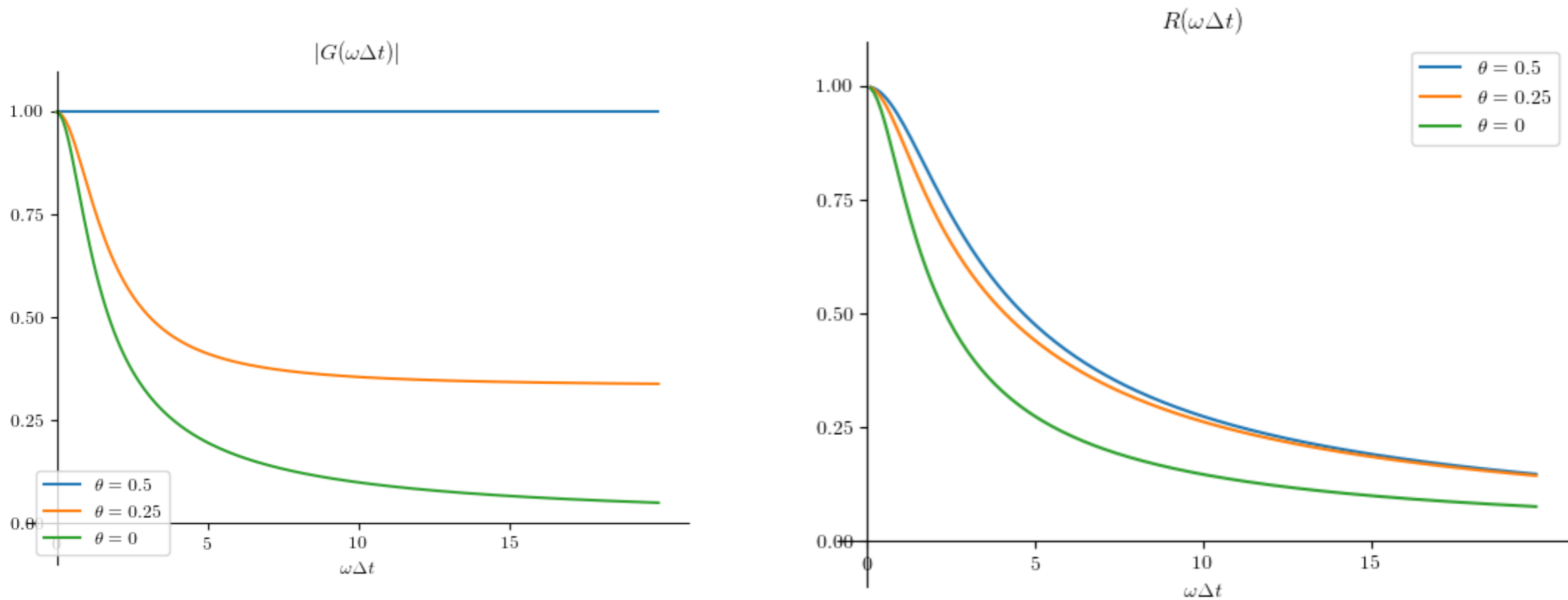
$$G = \frac{1 - i\theta\omega\Delta t}{1 + i(1 - \theta)\omega\Delta t}, \quad |G|^2 = \frac{1 + \theta^2(\omega\Delta t)^2}{1 + (1 - \theta)^2(\omega\Delta t)^2}$$

SCHÉMA STABLE SI  $\theta \leq 1/2$

SCHÉMA NEUTRE  $|G| = 1$  POUR  $\theta = \frac{1}{2}$

ET DANS CE CAS, LE SCHEMA EST INCONDITIONNEMENT STABLE : I.E.  $|G| \leq 1 \forall \omega\Delta t$

# Dissipation et dispersion du schéma



ON UTILISE UN SCHEMA IMPLICITE AVEC UN GRAND PAS DE TEMPS UNIQUEMENT QUAND LA PRECISION N'EST PAS IMPORTANTE. SINON COMPROMIS ENTRE TEMPS DE CALCUL ET PRECISION.

# Résolution d'un système linéaire

$$u^{n+1} = u^n - c\Delta t \left( \theta \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_n + (1 - \theta) \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{n+1} \right)$$

DISCRÉTISATION EN ESPACE

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_n \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{n+1} \approx \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}$$

$$au_{j-1}^{n+1} + bu_j^{n+1} + cu_{j+1}^{n+1} = f$$



RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

# Quelques schémas (explicites) classiques

$$\frac{dU}{dt} = F(U)$$

EULER

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t F(U^n)$$

ORDRE 1, INSTABLE SANS DIFFUSION  
CFL=1

LEAP FROG

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2\Delta t F(U^n)$$

ORDRE 2, INSTABLE POUR LA DIFFUSION  
MODE NUMÉRIQUE  
CFL=1

LF - AM3

$$U^{n+1,*} = U^{n-1} + 2\Delta t F(U^n)$$

$$U^{n+1} = U^n + \frac{\Delta t}{12} F(5U^{n+1,*} + 8U^n - U^{n-1})$$

ORDRE 3, MODES NUMÉRIQUES

CFL=1,5874

RUNGE-KUTTA ORDRE 2

$$U^{n+1,*} = U^n + \Delta t F(U^n)$$

$$U^{n+1} = U^n + \frac{\Delta t}{2} F(U^{n+1,*} + U^n)$$

ORDRE 2, INSTABLE SANS DIFFUSION  
CFL=1

RUNGE-KUTTA ORDRE 3

$$U^* = U^n + \frac{\Delta t}{3} F(U^n)$$

$$U^{**} = U^n + \frac{\Delta t}{2} F(U^*)$$

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t F(U^{**})$$

ORDRE 3

CFL=1,73205



# **Ordre en espace**

**OBJECTIF DE L'AUGMENTATION DE L'ORDRE D'UN SCHEMA :**

**DIMINUER LES ERREURS D'AMORTISSEMENT ET DE DISPERSION**

- **REMARQUE 1:**

**IMPACT DE L'AUGMENTATION DE L'ORDRE SUR LA CONDITION DE STABILITÉ**

# Lien entre CFL et condition de stabilité du schéma temporel d'advection

SOIT  $\omega \Delta t \leq \mu_{\max}$  LA CONDITION DE STABILITÉ DU SCHÉMA TEMPOREL

$$\text{CFL (NOMBRE DE COURANT MAX)} = c \frac{\Delta t_{\max}}{\Delta x} = \min_k \frac{\mu_{\max}}{(k\Delta x)} \frac{kc}{\omega}$$

SCHÉMA EXACT EN ESPACE (PAS D'ERREUR DE PHASE) :  $\omega = kc$

$$\rightarrow c \frac{\Delta t_{\max}}{\Delta x} = \min_k \frac{\mu_{\max}}{(k\Delta x)} = \frac{\mu_{\max}}{\pi}$$

$$\text{EN GÉNÉRAL : } c \frac{\Delta t_{\max}}{\Delta x} = \min_k \frac{\mu_{\max}}{(k\Delta x)} \frac{kc}{\omega_{\text{num}}} = \min_k \frac{\mu_{\max}}{(k\Delta x)R(k\Delta x)}$$

$R(k\Delta x)$  ERREUR DE PHASE

$$\text{EXEMPLE : CENTRÉ D'ORDRE 2 : } R(k\Delta x) = \frac{\sin(k\Delta x)}{k\Delta x}$$

$$\text{CFL} = \min_{k, k\Delta x \leq \pi} \frac{\mu_{\max}}{\sin(k\Delta x)} = \mu_{\max}$$

PLUS L'ORDRE EST ÉLEVÉ (I.E. PLUS  $R$  EST PROCHE DE 1), PLUS LA CFL EST CONTRAIGNANTE

# Ordre en espace

- **REMARQUE 2 :**

AUGMENTER L'ORDRE DU SCHEMA OU AUGMENTER LA RESOLUTION DE LA GRILLE  
(DIMINUER  $\Delta x$ )

QUE FAIRE PRÈS DES BORDS (CÔTES) ? (DÉGRADATION DU SCHEMA)

PARALLÉLISATION ? (NOMBRE DE GHOST CELLS NÉCESSAIRES AUGMENTENT AVEC  
L'ORDRE DU SCHEMA)

UN COMPROMIS EXISTE : ORDRE 5, 7 ?

- **REMARQUE 3 :**

SI ON AUGMENTE L'ORDRE EN ESPACE, IL FAUT AUGMENTER L'ORDRE EN TEMPS

# Etudes espace temps

NOMBRE DE COURANT MAXIMUM

Time Integration Scheme	Advection Scheme				
	<i>2<sup>nd</sup></i>	<i>3<sup>nd</sup></i>	<i>4<sup>nd</sup></i>	<i>5<sup>nd</sup></i>	<i>6<sup>nd</sup></i>
Leap Frog( $\epsilon = 0.1$ )	0.91	U	0.66	U	0.57
RK2	U	0.9	U	0.39	U
RK3	1.73	1.63	1.26	1.43	1.09
LFAM3	1.57	0.85	1.15	0.9	1.

# Etude espace temps

NOMBRE DE COURANT MAXIMUM  
DIVISÉ PAR LE NOMBRE D'ÉVALUATION DU SECOND MEMBRE

Time Integration Scheme	Advection Scheme				
	<i>2<sup>nd</sup></i>	<i>3<sup>nd</sup></i>	<i>4<sup>nd</sup></i>	<i>5<sup>nd</sup></i>	<i>6<sup>nd</sup></i>
Leap Frog( $\epsilon = 0.1$ )	0.91	U	0.66	U	0.57
RK2	U	0.45	U	0.2	U
RK3	0.58	0.54	0.42	0.48	0.36
LFAM3	0.79	0.43	0.58	0.45	0.5

# Extension au 2D

CFL EN 2D

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_x \frac{\partial u}{\partial x} + c_y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

SI LA STABILITÉ DU SCHEMA 1D EST DONNÉE PAR  $c_x \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \mu_{\max}$

LA STABILITÉ DU SCHEMA 2D EST DONNÉE PAR

$$c_x \frac{\Delta t}{\Delta x} + c_y \frac{\Delta t}{\Delta y} \leq \mu_{\max}$$

SAUF SI ON FAIT DU SPLITTING ... (I.E. ON INTÈGRE D'ABORD EN X PUIS EN Y)

$$\max \left( c_x \frac{\Delta t}{\Delta x}, c_y \frac{\Delta t}{\Delta y} \right) \leq \mu_{\max}$$