

Systèmes d'équations

Guillaume Roulet

LOPS, Brest

roulet@univ-brest.fr

25 Novembre 2019

Qu'est-ce qu'un modèle O/A ?

- ① un système d'équations fluides
- ② des méthodes numériques (discrétisation espace et temps)
- ③ des paramétrisations (sous-maillles, nuages, radiatif)
- ④ une implémentation (Fortran, MPI etc)

Et un modèle de climat ?

- un modèle A + modèle O + modèle glace + biosphère + ruissellement + ...

Quelles équations fluides ?

Equations de Navier-Stokes(NSE) ?

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

- $\mathbf{u} = (u, v, w)$: vitesse
- p : pression
- ν : viscosité

Non! pas en O/A, il manque trop d'ingrédients

Quelles équations fluides?

Les ingrédients manquant à NSE:

- rotation de la Terre (Coriolis)
- gravité (stratification)
- thermodynamique (flux de chaleur, humidité, salinité)
- sphéricité de la Terre
- viscosité moléculaire non pertinente
- etc.

Il existe non pas un, mais plusieurs systèmes d'équations fluides pour O/A, et même beaucoup. La communauté est très créative pour trouver de nouveaux jeux d'équations. Dans cette salle, vous utilisez des systèmes très différents.

Lequel choisir?

Cela dépend des ingrédients que vous jugez importants et des échelles que vous résolvez. Par exemple:

- couche mince (2D, 2D couches) vs. 3D complet
- composantes horizontales de Coriolis (hypothèse dite traditionnelle) vs. 3D
- hydrostatique vs. non-hydrostatique
- quel niveau de simplification de la thermodynamique ?
- etc.

Idée: il existe une **hiérarchie de modèles** dans lequel on ajoute de plus en plus d'ingrédients.

Le système le plus complet n'est pas forcément le plus adapté à votre question. Ne pas sous-évaluer l'intérêt des modèles plus simples.

Les modèles auront toujours ces **ingrédients génériques**

- des termes de **transport** $\partial_t \phi + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = \dots$ (capacité du fluide à transporter la quantité ϕ).
- des **ondes** (propagation d'énergie sans transport de masse)
- de la **nonlinéarité** (via au moins $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ et permettant les interactions d'échelles, instabilités, chocs, la turbulence)
- de la **dissipation** (d'énergie, de variance etc)

- 1 Mise en bouche sur RSW et QG
 - Modèle RSW
 - Modèle QG

I/ Le modèle shallow water tournant

Décrit un écoulement 2D dans une couche d'épaisseur h délimité par une **interface** avec une autre couche qu'on suppose au repos. On introduit $\Delta\rho$ la différence de densité entre les couche, ρ_0 la densité de la couche étudiée et $g' = g\Delta\rho/\rho_0$ la **gravité réduite**. On se place en référentiel tournant. Soit H l'**épaisseur de la couche** au repos. Les cas typiques sont

- couche : tout l'océan, interface : air-mer, $g' \approx g$, $H = 4000$ m [mode barotrope]
- couche : au dessus de la thermocline, interface : thermocline, $g' = 4.10^{-3}g$, $H = 200$ m [1er mode barocline].

LA référence sur RSW : *Geophysical Fluid Dynamics*, V. Zeitlin, Oxford U. Press, 2018

$$\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u = -g' \partial_x h + fv$$

$$\partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v = -g' \partial_y h - fu$$

$$\partial_t h + u \partial_x h + v \partial_y h = -h(\partial_x u + \partial_y v)$$

Variables: (u, v) les deux composantes de la vitesse et h l'épaisseur de la couche. **Coordonnées:** (x, y) . **Paramètres:** g' gravité réduite, f paramètre de Coriolis. **Dérivée matérielle**

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + u \partial_x + v \partial_y$$

calculant la dérivée temporelle en suivant le mouvement. Les deux premières sont les **équations de la quantité de mouvement** (*momentum equation*), la troisième est l'**équation de continuité** (*continuity equation*) traduisant la conservation de la masse.

La dérivée matérielle peut aussi être exprimée en terme de **divergence d'un flux**

$$\partial_t(hu) + \partial_x(huu) + \partial_y(huv) = -g'h\partial_x h + f(hv)$$

$$\partial_t(hv) + \partial_x(huv) + \partial_y(hvv) = -g'h\partial_y h - f(hu)$$

$$\partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = 0.$$

Cette forme se prête bien à une discretisation en **volume finis**.

Forme alternative, dite “vector invariant”

$$\partial_t u = -\partial_x B + (f + \zeta)v$$

$$\partial_t v = -\partial_y B - (f + \zeta)u$$

$$\partial_t h = -\partial_x(hu) - \partial_y(hv)$$

avec $B = g'h + (u^2 + v^2)/2$ la **fonction de Bernoulli** et $\zeta = \partial_x v - \partial_y u$ la **vorticité**.

Pour une implémentation numérique il y a deux écoles: les modèles préférant la forme flux (ROMS/CROCO par exemple) et ceux préférant cette forme (NEMO par exemple). Il n'est pas clair de savoir laquelle de ces deux formes offre les meilleures avantages.

cf. TP Python avec code RSW discrétisé en forme 'vector invariant'

Prise en compte des termes sous-maille (SGS: sub-grid scale)

En pratique les équations sont discrétisées sur une grille.
Les grandeurs discrétisées représentent une **moyenne** sur chaque maille (de taille Δx)

$$\mathbf{u}(x, t) \rightarrow \mathbf{u}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i - \Delta x/2}^{x_i + \Delta x/2} \mathbf{u}(x, t_n) dx$$

Les équations continues vues par \mathbf{u}_i^n doivent être moyennées.
Décomposition en $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$. Un modèle résout les équations pour $\bar{\mathbf{u}}$, pas \mathbf{u} . Conséquence: apparition d'un terme sous-maille

$$\overline{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \underbrace{\overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'}}_{\text{terme sous maille}},$$

qu'il faut **paramétriser**

Terme de dissipation

Les équations présentées ci-dessus sont **non-dissipatives** (*inviscid*). Dans une implémentation numérique il y a toujours une nécessité d'introduire un minimum de dissipation pour régulariser (lisser) la solution. Il existe de nombreuses techniques (cf cours du mardi). La plus simple consiste à introduire un terme de friction dans la quantité de mouvement qui peut être au choix

friction linéaire

$$\partial_t \mathbf{u} = \dots - \lambda \mathbf{u}$$

où λ est une constante de temps ($[\lambda] = T^{-1}$).

dissipation visqueuse

$$\partial_t \mathbf{u} = \dots + \nu \Delta \mathbf{u}$$

où ν est un coefficient de viscosité ($[\nu] = L^2 T^{-1}$). Attention ce coefficient dépend de la résolution spatiale. Son choix est un élément critique. Il doit ni être trop petit (pour jouer un rôle), ni être trop grand (pour ne pas trop diffuser). Il varie typiquement comme Δx .

Un jeu d'équations admet toujours des **conditions aux limites**. Une partie des problèmes se cachent dans ces conditions aux limites. Pour RSW on a a minima la

i) **condition d'imperméabilité** (*no-flow*): $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ le long du bord (\mathbf{n} vecteur normal à la frontière)

qu'on peut transformer en une condition plus forte

ii) **condition de non-glissement** (*no-slip*): $\mathbf{u} = 0$ le long du bord. Cette dernière induit une dissipation d'énergie. On verra en TP qu'elle est un moyen d'équilibrer un système forcé (TP Rayleigh Benard).

Un moyen très utile tant physiquement que numériquement de caractériser un système d'équations est de décrire les **ondes** qu'il supporte.

Pour obtenir la physique des ondes, on part d'un état de référence, par exemple le repos $(u, v, h) = (0, 0, H)$, qu'on perturbe légèrement (u', v', h') avec une amplitude ϵ , un **petit paramètre de contrôle**. On cherche les solutions sous forme de modes de Fourier $\sim \exp[i(kx + ly - \omega t)]$.

Les équations s'écrivent

$$\epsilon \partial_t u' = -\epsilon \partial_x (g' h' + \epsilon K') + (f + \epsilon \zeta') \epsilon v'$$

$$\epsilon \partial_t v' = -\epsilon \partial_y (g' h' + \epsilon K') - (f + \epsilon \zeta') \epsilon u'$$

$$\epsilon \partial_t h' = -\epsilon [\partial_x (H u') + \partial_y (H v')] - \epsilon^2 [\partial_x (h' u') + \partial_y (h' v')]$$

La **linéarisation** consiste à ne garder que les termes linéaires, i.e. les termes en $\mathcal{O}(\epsilon)$.

soit

$$\begin{aligned}\partial_t u' &= -g' \partial_x h' + f v' \\ \partial_t v' &= -g' \partial_y h' - f u' \\ \partial_t h' &= -H(\partial_x u' + \partial_y v')\end{aligned}$$

En injectant les modes de Fourier puis en prenant le déterminant on trouve la **relation de dispersion**

$$\omega(\omega^2 - f^2 - g' H k^2) = 0$$

dont les trois racines correspondent aux trois ondes

- deux **ondes de gravito-inertie** $\omega^2 = f^2 + c^2 k^2$, avec $c = \sqrt{g' H}$
- **mode géostrophique** $\omega = 0$

Le rayon de déformation de Rossby

Un paramètre dimensionnel naturel de RSW est le **rayon de déformation de Rossby**

$$R_d = \frac{\sqrt{g'H}}{f}$$

Le nombre adimensionnel associé est le **nombre de Burger**

$$\text{Bu} = \frac{R_d^2}{L^2}$$

où L est l'échelle spatiale caractéristique du phénomène considéré. On distingue les trois régimes suivants:

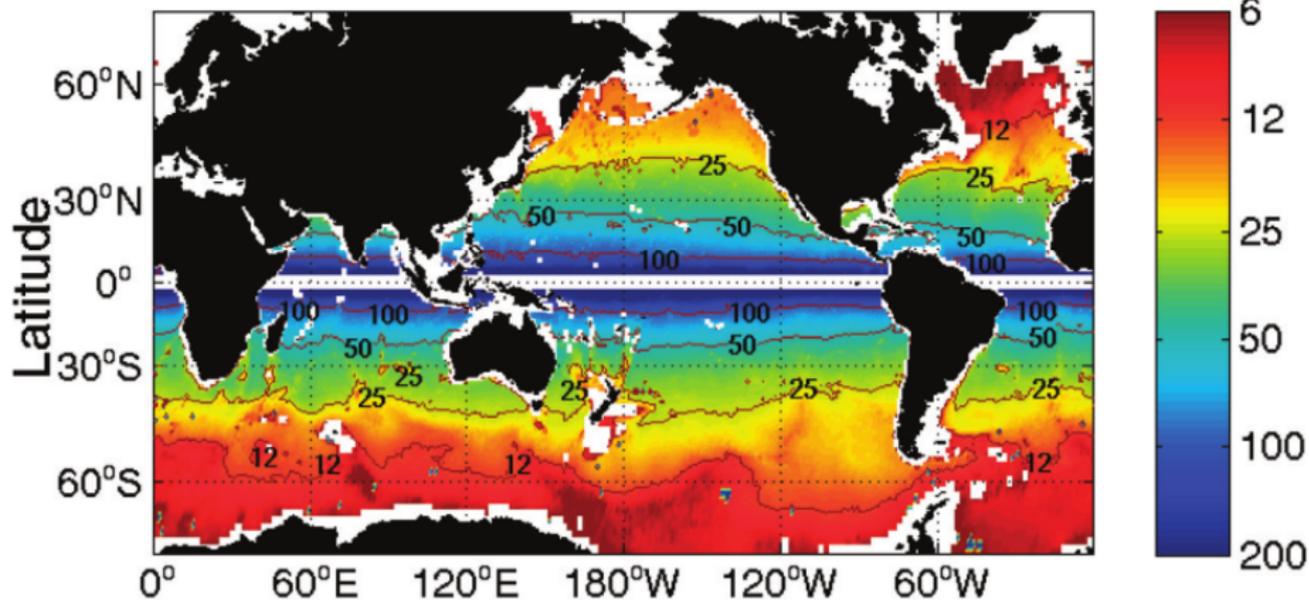
sous-mésoéchelle $\text{Bu} \gg 1$

mésoéchelle $\text{Bu} \sim 1$

grande échelle $\text{Bu} \ll 1$.

Pour l'océan, aux moyennes latitudes $R_d \sim 30 \text{ km}$

First Rossby Radius of Deformation (Km)



[Smith, K. S., J. Marine Research, 2007]

Remarque importante, si f est uniforme (approximation plan f) alors le mode géostrophique n'évolue pas en temps. Si on passe à l'approximation du plan beta = on prend en compte la sphéricité de la Terre via la dépendance de f en la latitude: $f = f_0 + \beta y$ alors le mode géostrophique ω se transforme en **onde de Rossby**

$$\omega = -\frac{\beta k_x}{k^2 + R_d^{-2}} \quad (3)$$

Généralisation, ce qui compte pour avoir des ondes de Rossby c'est un gradient de f/H :

- gradient de f : ondes de Rossby planétaires
- gradient de H : ondes de Rossby topographiques

Synthèse des relations de dispersion

advection (transport)

$$\omega = k U$$

inertie-gravité

$$\omega^2 = f^2 + k^2 R_d^{-2}$$

Rossby

$$\omega = -\frac{\beta k_x}{1 + k^2 R_d^{-2}}$$

Relie l'échelle temporelle à l'échelle spatiale

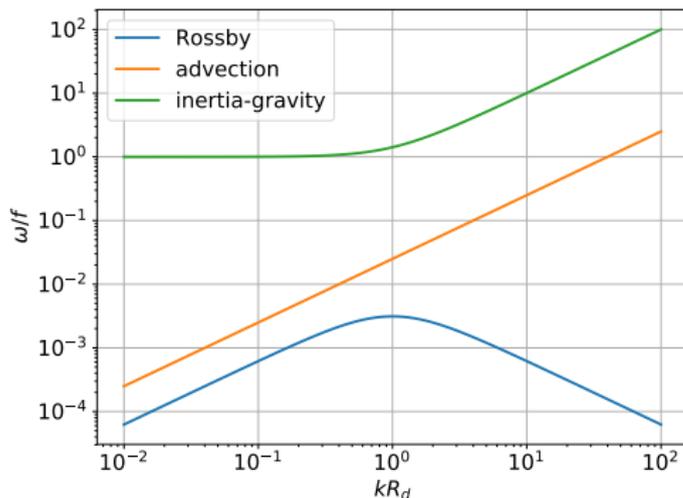


Figure: $R_d = 40 \text{ km}$, $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\mu = R_d/R_T = 40/6400$, $U = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$

Les ondes sont capables de transporter l'énergie beaucoup plus vite que l'écoulement. On distingue U , la vitesse des parcelles et c la vitesse (de phase) des ondes. c dépend de k et du type d'ondes.

- gravité: $c_g = \sqrt{g'H}$ [soit $f R_d$, très utile en 3D stratifié !]
- Rossby: $c_R = \beta R_d^2$ [pour les ondes longues]

Les ondes de gravité vont vite : elles posent une grosse contrainte sur le pas de temps du modèle

Le **nombre de Froude** est $Fr = U/c_g$. Il indique l'importance du couplage entre les ondes de gravité et l'écoulement. $Fr \ll 1$: les ondes sont découplées. Motivation pour étudier un système sans ondes de gravité.

Un autre nombre adimensionnel absolument essentiel est le **nombre de Rossby**

$$Ro = \frac{U}{fL}$$

où L est l'échelle spatiale caractéristique et U l'échelle de vitesse caractéristique. Le nombre de Rossby caractérise l'importance de la force de Coriolis par rapport à l'advection avec les régimes suivants

- $Ro \ll 1$ la force de Coriolis est centrale, l'équilibre dominant est la **géostrophie**
- $Ro \leq 1$ la force de Coriolis est très importante
- $Ro \gg 1$ la force de Coriolis est négligeable, i.e. on peut négliger les effets de rotation de la Terre.

Dans l'océan, seuls les phénomènes $L < 1$ km ont un $Ro \gg 1$.

Vorticité potentielle

Il s'agit d'une quantité essentielle pour la dynamique à méso et grande échelle (en fait $Fr \ll 1$). Pour RSW la PV est

$$q = \frac{f + \zeta}{h} = \frac{\text{vorticity}}{\text{stretching}}$$

La particularité de la PV est qu'elle est **matériellement conservée**

$$D_t q = 0$$

et que moyennant l'hypothèse $Ro \leq 1$ la connaissance de $q(x, y)$ suffit à caractériser toutes les autres variables (u, v, h). C'est le **principe d'inversibilité** (Hoskins 1985).

Remarque importante: il existe une PV pour chaque système d'équations. La forme précise que prend la PV dépend du système considéré. Pour les équations primitives, il s'agit de la **PV d'Ertel** ($q = \nabla \times \mathbf{u} \cdot \nabla \rho$)

Le modèle QG est basé sur les hypothèses que pour $Bu \sim 1$ et $Ro \ll 1$ l'écoulement est dominé par l'équilibre géostrophique

$$-g' \partial_x h + fv = 0, \quad -g' \partial_y h - fu = 0.$$

Le modèle QG décompose la vitesse en une **composante géostrophique** \mathbf{u}_g et un résidu, la **composante agéostrophique** \mathbf{u}_a . La vitesse géostrophique dérive donc de la **fonction de courant géostrophique**

$$\psi = g' h / f$$

$$u_g = -\partial_y \psi \quad v_g = +\partial_x \psi$$

Le système d'équations QG est

$$\partial_t u_g + J(\psi, u_g) = +fv_a$$

$$\partial_t v_g + J(\psi, v_g) = -fu_a$$

$$\partial_t h + J(\psi, h) = +w_a$$

où l'on a écrit les termes de transport à l'aide du jacobien

$J(\psi, \cdot) = \partial_x \psi \partial_y \cdot - \partial_y \psi \partial_x \cdot$ et fait apparaître w_a la composante verticale de la vitesse agéostrophique.

La forme précédente est utile pour prendre conscience de la proximité de QG avec SW, elle permet de comprendre que la circulation agéostrophique n'est pas totalement ignorée (forçage membre de droite). L'inconvénient est qu'on ne voit pas qu'en réalité il n'y a qu'un degré de liberté et pas trois. On utilise alors la relation suivante

$$\partial_x u_a + \partial_y v_a + w_a/H = 0$$

qu'on applique au système précédent pour trouver

$$\partial_t q + J(\psi, q) = 0$$

$$\Delta\psi - R_d^{-2}\psi = q$$

Sous cette forme on retrouve les deux ingrédients importants de la dynamique à mésoéchelle:

- la PV est matériellement conservée
- le principe d'inversion permet de diagnostiquer toutes les variables à partir de la PV.

L'équation relation ψ à q est une **équation elliptique**.

- There is no free lunch
- Conservation of misery

Les ondes de gravité sont rapides et imposent un petit pas de temps. En les filtrant on est arrivé au modèle QG qui permet des plus grands pas de temps. It looks like free lunch! trop beau pour être vrai. Le coût est qu'il faut résoudre une équation elliptique. Ça coûte cher et c'est pas du tout confortable à résoudre.

Conservation of misery. C'est très difficile de faire mieux que ce qui a déjà tenté. (Mais ça ne veut pas dire que ce n'est pas possible)

Equation elliptique: pourquoi c'est difficile?

La difficulté vient de ce que **le Laplacien couple les directions**. La solution est globale et ne peut être calculée de proche en proche. Dans le cas d'un Laplacien 1D alors la résolution est triviale (système tridiagonal): diffusion turbulente dans les modèles O.

Difficultés numériques:

- choix du solveur itératif (PCG, multigrille etc)
- problème de convergence avec augmentation du nombre de points de grille pour certains algo: e.g. PCG
- parallélisation

La communauté OA n'aime pas trop ces problèmes, on préfère trouver des astuces pour ne pas avoir à résoudre ce genre d'équation ...

Les deux principales équations elliptiques sont l'**équation de Poisson**

$$\nabla^2 \phi = r.h.s. ,$$

où ϕ est l'inconnue, et l'**équation de Helmholtz**

$$\phi - \gamma^2 \nabla^2 \phi = r.h.s. ,$$

où γ est un paramètre donné, comme l'équation QG précédente. Les équations elliptiques se retrouvent dans

- modèles O à toit rigide ou surface libre implicite (NEMO)
- modèles A avec schéma d'advection semi-implicite
- modèles O non-hydrostatique (calcul la pression)
- modèles intermédiaires, type QG ou en fonction de courant (cf. TP)

Le modèle QG ne retient que l'onde de Rossby. Par construction **il filtre les ondes** de gravito-inertie.

L'onde de Rossby s'obtient par exemple en faisant l'approximation plan beta ce qui conduit à introduire une PV planétaire dans la définition

$$q = \Delta\psi - R_d^{-2}\psi + \beta y$$

Le premier terme est la vorticité, le second est l'étirement (*stretching*), le troisième est l'effet β , encodant la courbure de la Terre.

- RSW et QG retiennent tous les deux des **termes d'advection** ($\mathbf{u} \cdot \nabla$)
- RSW est entièrement explicite: les trois variables du modèles sont **pronostiques** [se calculent via leur dérivée temporelle].
- QG possède une partie prognostique (advection de la PV) et une partie **diagnostique** (relation entre q et ψ). La partie diagnostique est un **problème de type elliptique**.
- les deux systèmes sont capables d'avoir des ondes. QG n'a que l'**onde de Rossby**, RSW a en plus les **ondes de gravito-inertie**.
- RSW et QG ont tous les deux des **conditions aux limites**
- ils peuvent tous les deux être rendus dissipatifs par l'ajout d'un **terme de dissipation**.

- **Fluid2d** code versatile en Python/Fortran
- plusieurs modèles: advection 2D, Euler 2D, Boussinesq 2D, quasi-geostrophique 2D
- combinant les ingrédients précédents: advection, equation de poisson, etc.
- une grande diversité de schémas numériques, y compris un solveur multigrille
- et permettant l'étude d'une vaste gamme d'écoulements 2D (tournant ou stratifié)
- **RSW** code shallow water en Python/Fortran